

UNIVERSITE DU QUEBEC

MEMOIRE PRESENTE

A

L'UNIVERSITE DU QUEBEC A TROIS-RIVIERES

COMME EXIGENCE PARTIELLE

DE LA MAITRISE EN SCIENCES (PHYSIQUE)

PAR

SYLVAIN GAUTHIER

ETUDE D'UNE SUBSTANCE DIELECTRIQUE

DANS UNE CAVITE RESONNANTE

JUILLET 1987

Université du Québec à Trois-Rivières

Service de la bibliothèque

Avertissement

L'auteur de ce mémoire ou de cette thèse a autorisé l'Université du Québec à Trois-Rivières à diffuser, à des fins non lucratives, une copie de son mémoire ou de sa thèse.

Cette diffusion n'entraîne pas une renonciation de la part de l'auteur à ses droits de propriété intellectuelle, incluant le droit d'auteur, sur ce mémoire ou cette thèse. Notamment, la reproduction ou la publication de la totalité ou d'une partie importante de ce mémoire ou de cette thèse requiert son autorisation.

RESUME

Cet ouvrage porte principalement sur la relation théorique qui existe entre la permittivité d'un échantillon donné et la fréquence de résonance complexe d'une cavité cylindrique le contenant. Cette relation théorique, qu'on appelle l'équation caractéristique, est précisément connue dans le cas d'une cavité cylindrique "idéale", c'est-à-dire parfaitement conductrice et complètement fermée. La cavité qui nous intéresse, elle, a des parois de conductivité finie, possède deux ouvertures cylindrique d'insertion et contient deux antennes intérieures de couplage. Les ouvertures cylindrique d'insertion permettent d'introduire directement l'échantillon dans la cavité. Quant aux antennes, l'une d'elles est reliée à un fréquencemètre, et l'autre place la cavité dans un circuit actif rétrocouplé. Dans ce mémoire, nous obtenons les corrections à effectuer par rapport au cas idéal, pour y inclure la conductivité des parois et les effets dus aux ouvertures cylindrique d'insertion. Pour ce qui est des antennes de couplage, leurs effets sont ici négligés. Après avoir dérivé les équations de correction, nous donnons et expliquons le programme informatique utilisé pour calculer ces corrections, et résoudre l'équation caractéristique (laquelle est transcendante).

REMERCIEMENTS

Je désire témoigner ma profonde gratitude à mon directeur de thèse, le docteur Louis Marchildon, professeur-chercheur au département de physique de l'université du Québec à Trois-Rivières, pour le dévouement qu'il a manifesté dans la direction de ce travail. Son étroite collaboration, son aide précieuse ainsi que ses nombreux conseils, m'ont guidé tout au cours de la recherche et de la rédaction.

Mes remerciements s'adressent également au docteur Jerzy Sochanski du service de l'informatique pour la documentation et les nombreuses informations qu'il m'a fournies lors de l'élaboration du programme informatique .

Je tiens aussi à remercier mon épouse, Isabelle, pour avoir patiemment dactylographié ce travail, et pour m'avoir prodigué ses nombreux encouragements.

TABLE DES MATIERES

	page
RESUME.	11
REMERCIEMENTS	iii
TABLE DES MATIERES.	iv
LISTE DES FIGURES	vii
CHAPITRE	
I - METHODE DE RESONANCE	1
1.1 Introduction	1
1.2 Facteur de qualité Q et fréquence de résonance f	6
1.2.1 Mesure de f et Q	6
1.2.2 Remarque sur le facteur de qualité Q	13
1.3 Cavités idéale et non idéale	16
II - CAVITE CYLINDRIQUE IDEALE (MODE TM)	21
2.1 Equations de Maxwell	21
2.2 Guide d'ondes circulaire	28
2.2.1 Solution en coordonnées cylindriques	29
2.2.2 Condition de parfait conducteur et de continuité	37
2.2.3 Equation caractéristique	43
2.2.4 Déviation relative du nombre d'onde (due aux matériaux)	46
2.3 Cavité idéale.	49

2.3.1	Distribution des champs	49
2.3.2	Energie	51
2.3.3	Déviatiôn de la fréquence de résonance complexe	57
III -	CONDUCTIVITE DES PAROIS	61
3.1	Effet de la conductivité	61
3.2	Paroi circulaire	65
3.3	Parois du haut et du bas	70
IV -	TROUS D'INSERTION	72
4.1	Introduction	72
4.2	Distribution des champs électro- magnétiques.	75
4.2.1	Expressions générales des champs	76
4.2.2	Détermination des κ_{ou}	85
4.2.3	Détermination des d_{ou}	86
4.2.4	Détermination des $R_{ou}^{(1)}$	86
4.3	Calcul de $\delta f/f$ et $\delta(1/Q)$ par rapport à la cavité idéale	91
4.3.1	Calcul de la déviation relative de fréquence $\delta f/f$	91
4.3.2	Calcul de la déviation du facteur de qualité $\delta(1/Q_{s, tube})$	99
4.4	Erreur relative sur la mesure de la permittivité	105
V-	PROGRAMMATION (MODE TM_{0m0}).	111
5.1	Introduction	111
5.2	Résolution numérique des équations caractéristiques	115
5.3	Déviatiôn relative de la fréquence de résonance $\delta\omega/\omega$	125
5.3.1	Trous d'insertion.	125
5.3.2	Bouts conducteurs.	134
5.4	Algorithme	135

VI-	DISCUSSION ET RESULTATS	146
	6.1 Calcul approximatif.	146
	6.2 Effets des trous d'insertion	148
	6.2.1 Equation caractéristique appro- ximative	148
	6.2.2 Equation caractéristique exacte. .	159
	6.3 Rayon des ouvertures cylindrique d'insertion et conductivité.	165
ANNEXES		
A-	FONCTIONS DE BESSEL.	179
B-	CONDITIONS DE CONTINUITE ET DE PARFAIT CONDUCTEUR	195
C-	PROGRAMME PERMI.	206
D-	PROGRAMME CORRCD	248
	REFERENCES	252

LISTE DES FIGURES

figure 1.1	Cavité cylindrique conductrice possédant un tube d'insertion conducteur	4
figure 1.2	Principaux constituants du système actif. .	7
figure 1.3	Courbe de phase de la cavité cylindrique. .	9
figure 1.4	Courbe d'amplitude de la cavité. L'atténuateur a atteint la valeur où les oscillations cessent	11
figure 1.5	Courbe d'amplitude de la cavité. L'atténuateur a diminué de trois décibels par rapport au sommet de la courbe.	12
figure 1.6	Cavité idéale et non idéale	18
figure 2.1	Tube parfaitement conducteur contenant N matériaux homogènes, isotropes et linéaires	26
figure 2.2	Coordonnées cylindriques.	27
figure 3.1	Interface conducteur diélectrique.	63
figure 4.1	Cavité cylindrique non idéale contenant N-1 matériaux isotropes, linéaires et homogènes	73
figure 4.2	Atténuation à l'intérieur du tube d'insertion conducteur, ouvert et fermé.	77
figure 4.3	Cavité cylindrique non idéale complètement fermée.	79
figure 4.4	Déformation adiabatique d'une cavité. . . .	93a
figure 5.1	Configuration de la cavité que le programme PERMI considère	116
figure 5.2	Algorithme (PERMI).	136
	Algorithme (PERMI). (suite).	137

figure 6.1	C en fonction de R_1/RT (Li et Bosisio). . .	149
figure 6.2	D en fonction de R_1/RT (Li et Bosisio). . .	150
figure 6.3	C en fonction de R_1/RT . Cas réel	151
figure 6.4	D en fonction de R_1/RT . Cas réel	152
figure 6.5	C en fonction de R_1/RT . Cas complexe ($\epsilon_1' = 81.0$).	155
figure 6.6	C en fonction de R_1/RT . Cas complexe ($\epsilon_1' = 9.0$)	156
figure 6.7	D en fonction de R_1/RT . Cas complexe ($\epsilon_1' = 81.0$).	157
figure 6.8	D en fonction de R_1/RT . Cas complexe ($\epsilon_1' = 9.0$)	158
figure 6.9	Correction relative de ϵ_1' en fonction de R_1/RT . Cas réel	160
figure 6.10	Correction relative de ϵ_2' en fonction de R_1/RT . Cas réel ($\epsilon_2' = 4.75$).	162
figure 6.11	Correction relative de ϵ_1' en fonction de R_1/RT . Cas réel (équation caractéris- tique approximative).	163
figure 6.12	Correction relative de ϵ_1' en fonction de R_1/RT . Cas complexe ($\epsilon_1' = 81.0$).	166
figure 6.13	Correction relative de ϵ_1' en fonction de R_1/RT . Cas complexe ($\epsilon_1' = 9.0$)	167
figure 6.14	Correction relative de ϵ_1' en fonction de R_1/RT . Cas complexe ($\epsilon_1' = 81.0$).	168
figure 6.15	Correction relative de ϵ_1' en fonction de R_1/RT . Cas complexe ($\epsilon_1' = 9.0$)	169
figure 6.16	Correction relative de ϵ_1'' en fonction de R_1/RT . Cas complexe ($\epsilon_1' = 81.0$, équation caractéristique approximative)	170
figure 6.17	Correction relative de ϵ_1'' en fonction de R_1/RT . Cas complexe ($\epsilon_1' = 9.0$ équation caractéristique approximative).	171
figure 6.18	Correction relative de ϵ_1' en fonction de RT/R_2 . RT variable.	172

figure 6.19	Correction relative de ξ_1'' en fonction de RT/R_2 . RT variable.	173
figure 6.20	Correction relative de ξ_1' en fonction de $Q(\text{vide})$. Conductivité variable.	175
figure 6.21	Correction relative de ξ_1'' en fonction de Q (vide). Conductivité variable.	176
figure B.1	Volume à l'interface des milieux un et deux.	197
figure B.2	Interface un-deux	199

CHAPITRE I

METHODE DE RESONANCE

1.1 Introduction

La permittivité est une caractéristique électrique des matériaux qui est très importante. C'est une quantité macroscopique qui indique la facilité d'une substance à se polariser sous l'effet d'un champ électromagnétique donné. La polarisation électrique dont il est sujet a son origine dans deux processus microscopiques différents: la déformation des atomes, molécules, groupes de molécules... et l'alignement des molécules polaires suivant la direction du champ électrique appliqué, qu'on appelle respectivement polarisation de déformation et rotationnelle. Lorsque le champ électrique est variable, ces deux processus vont dissiper de l'énergie du champ électromagnétique en pertes diélectriques, due à la viscosité du milieu et au déphasage de la polarisation rotationnelle avec le champ appliqué. Le chauffage par micro-onde provient justement de ces pertes diélectriques.

Une quantité intimement reliée à la première est la permittivité efficace (aussi appelée permittivité complexe), laquelle inclut les phénomènes de polarisation et des pertes d'énergie, due à la conductivité ohmique du milieu. Macroscopiquement la conductivité ohmique produit des effets similaires à ceux de la permittivité. Par contre, d'un point de vue microscopique, l'origine des phénomènes est différente. En effet les charges libres, responsables de cette conductivité, vont sous l'action d'un champ électromagnétique polariser la substance en se déplaçant de part et d'autre de celle-ci. Ces déplacements vont occasionner des collisions avec les molécules du milieu produisant aussi des pertes d'énergie du champ.

La permittivité efficace permet avec les équations de Maxwell de déterminer les champs électromagnétiques macroscopiques, l'énergie emmagasinée et les pertes d'énergie à l'intérieur d'une substance donnée. De plus, elle fournit un moyen d'étudier la structure interne et moléculaire de différentes substances, puisqu'elle a son origine dans des processus de polarisation moléculaire et de charge libre.

Le sujet de nos travaux de recherche porte principalement sur la mesure de la permittivité efficace de matériaux homogènes, isotropes, linéaires et de faible conductivité, à partir d'une cavité cylindrique résonnante.

Dans la littérature, on trouve quatre classes de mesures effectuées pour la permittivité utilisant respectivement^[1]:

- 1) la propagation libres des ondes dans l'espace;
- 2) les ondes guidées (lignes coaxiales ou guides d'onde);
- 3) les méthodes de résonance;
- 4) la technique spectroscopique dans le domaine du temps (T. D. S.).

La méthode qui nous intéresse se situe dans les mesures de résonance où l'onde varie sinusoidalement dans le temps à une fréquence donnée. Cette méthode est basée sur la résonance des champs électromagnétiques à l'intérieur d'une cavité cylindrique conductrice. C'est le même genre de résonance qu'une corde entre deux murs sauf qu'ici c'est un champ électrique $e(r,t)$ et un champ magnétique $h(r,t)$ qui vibrent.

La cavité cylindrique utilisée pour prendre les mesures de permittivité (figure 1.1), a des parois de conductivité finie, est rétrocouplée par l'intermédiaire d'un circuit externe, et possède deux ouvertures cylindrique d'insertion pour introduire l'échantillon dans la cavité. Ces deux ouvertures cylindrique d'insertion sont appelé tube d'insertion conducteur, c'est à dire, nous utilisons

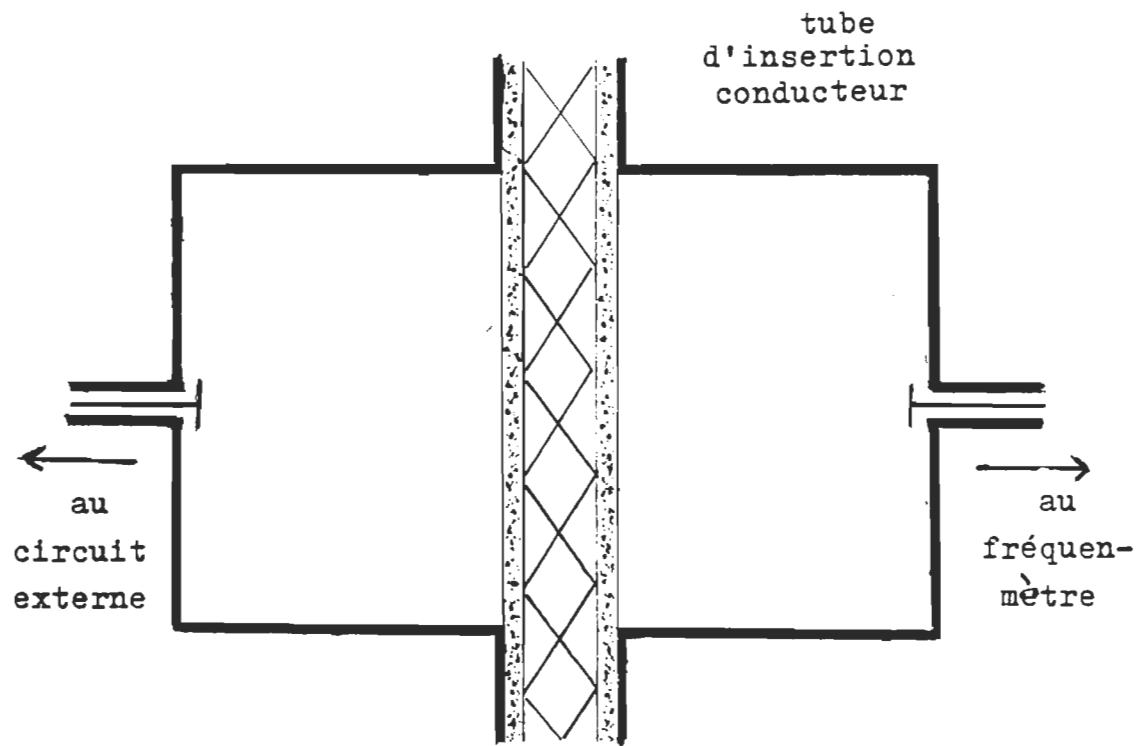


Figure 1.1 Cavité cylindrique conductrice possédant un tube d'insertion.

l'expression tube d'insertion conducteur pour signifier les deux ouvertures cylindriques d'insertion.

La permittivité d'un échantillon se détermine de la façon suivante.

- i) On introduit l'échantillon dans la cavité.
- ii) On mesure la fréquence de résonance f et le facteur de qualité Q , ce qui donne la fréquence angulaire complexe ω car de l'équation (1.17), on a

$$\omega = 2\pi f \left(1 + \frac{1}{2Q} \right) \quad (1.1)$$

- iii) Finalement on calcule la permittivité ϵ à partir de la relation théorique entre celle-ci et la fréquence (angulaire) de résonance complexe ω pour un tel système résonnant.

$$\epsilon = F(\omega) \quad (1.2)$$

Cette relation théorique, c'est ce qu'on appelle l'équation caractéristique. Le sujet de nos travaux de recherche porte essentiellement sur celle-ci. Avant d'aborder davantage ceci, on va examiner brièvement la façon de mesurer la fréquence de résonance f et le facteur de qualité Q .

1.2 Facteur de qualité Q et fréquence de résonance f

1.2.1 Mesure de f et Q

La cavité est utilisée dans un circuit bouclé [1], c'est-à-dire, le signal micro-onde est rétrocouplé à un amplificateur hyperfréquentiel (figure 1.2). C'est ce qu'on appelle un système actif. La portion du circuit autre que la cavité est appelée le circuit externe.

Pour qu'il y ait des oscillations dans le circuit micro-onde bouclé, il faut que le produit des gains des éléments actifs et passifs soit supérieur ou égal à un.

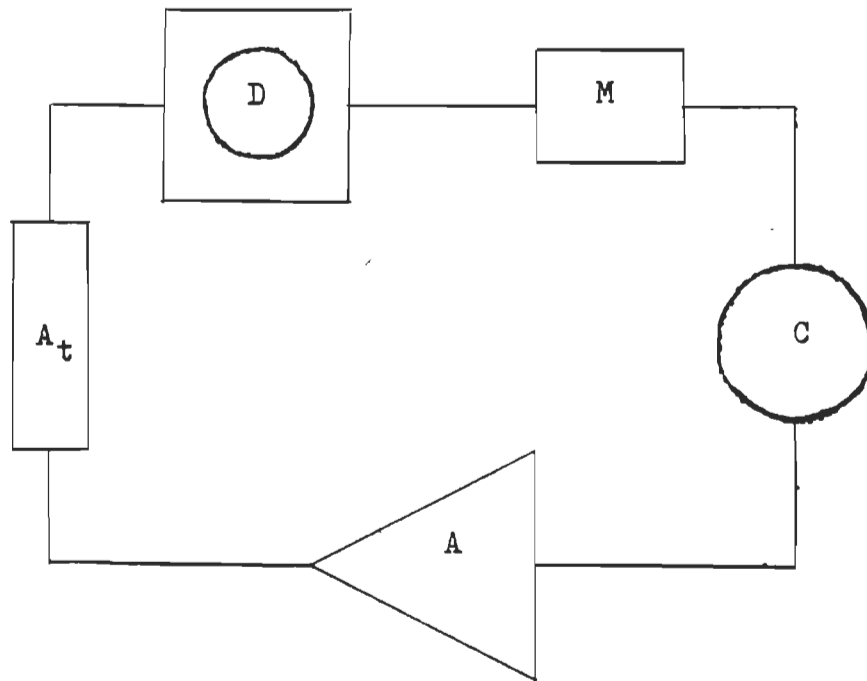
$$\prod G_i \geq 1 \quad (1.3)$$

De plus, la somme des phases introduites par chaque élément doit être égale à un multiple entier de 2π .

$$\sum \phi_i = 2\pi n \quad (1.4)$$

où n est un entier.

La fréquence de résonance se mesure en exploitant essentiellement la condition de phase. Les différents éléments du circuit ont des phases qui sont dépendantes les unes des autres, puisqu'elles doivent satisfaire la



A: amplificateur hyperfréquentiel

A_t: atténuateur variable

C: cavité cylindrique résonnante

D: déphaseur variable

M: modulateur de phase

Figure 1.2 Principaux constituants du système actif.

restriction imposée par la condition de phase. Par conséquent la phase de la cavité peut être modifiée en changeant celle des autres éléments du circuit.

La cavité cylindrique se comporte comme un circuit résistance, inductance et capacitance connectées en série (circuit RLC), d'où elle possède une courbe de phase typique des systèmes résonnants (figure 1.3). Une caractéristique intéressante de cette courbe est la dépendance entre la fréquence de vibration du système et la phase de la cavité. La variation de fréquence, produite par un changement de phase constant autour d'un point donné, est minimum lorsqu'on est centré sur la fréquence de résonance. On se sert de cela pour déterminer la fréquence de résonance du système.

En utilisant le déphaseur, on change la phase de la cavité et ainsi on se choisit une fréquence d'oscillation particulière. Ensuite, le modulateur de phase produit une variation constante de phase dans la cavité à laquelle est associée une variation de fréquence donnée. Pour trouver la fréquence de résonance il suffit de chercher, en utilisant le déphaseur, la fréquence pour laquelle cette variation est minimum.

Le facteur de qualité est défini par [2] [3]

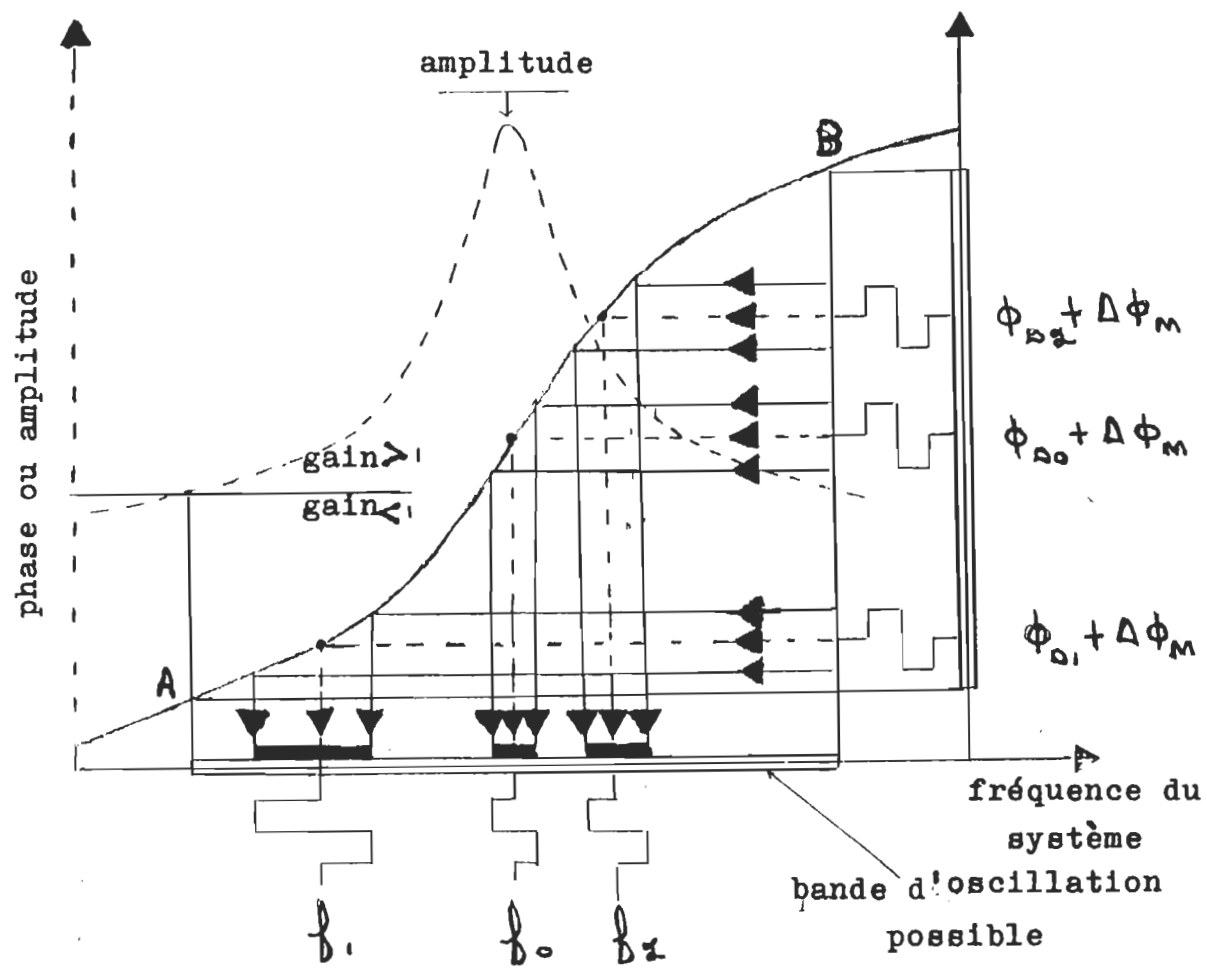


Figure 1.3 Courbe de phase de la cavité cylindrique.

$$Q \equiv \frac{\omega_r' W}{P} \quad (1.5)$$

où

ω_r' : Fréquence de résonance du système forcé.

W: Energie emmagasinée par le système forcé.

P: Puissance dissipée à l'intérieur du système forcé.

Remarque: Pour un système forcé l'atténuation est nulle ($\omega''=0$) car l'énergie dissipée est remplacée à mesure.

Pour des systèmes légèrement amortis, on montre que^[3] le facteur de qualité est donné par le rapport de la fréquence de résonance sur la largeur de bande passante

$$Q = \frac{f_r}{\Delta f} \quad (1.6)$$

où Δf est la largeur de bande à trois dB de l'amplitude maximum.

Lorsqu'on a trouvé la fréquence de résonance par la façon précédente, on augmente l'atténuation jusqu'à ce que les oscillations cessent (figure 1.4). Ensuite, on la diminue de trois dB (figure 1.5), d'où maintenant la largeur de bande d'oscillation possible correspond à celle de l'équation (1.6). En variant la phase on trouve les fréquences f_2 et

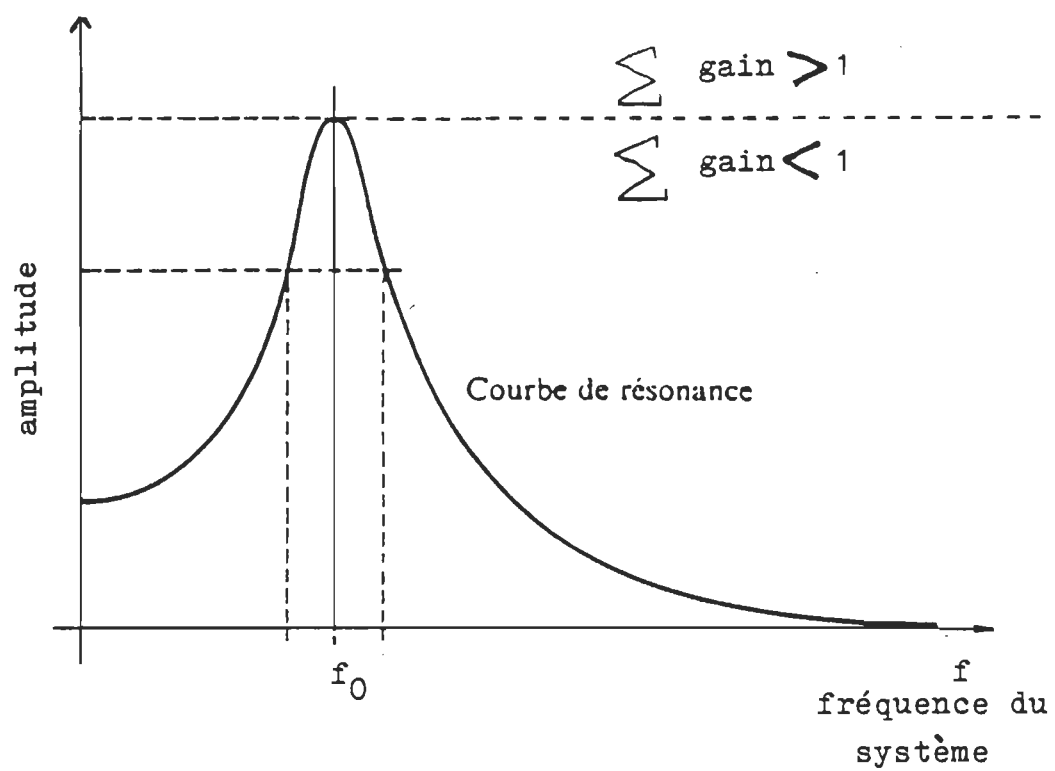


Figure 1.4 Courbe d'amplitude de la cavité. L'atténuation a atteint la valeur où les oscillations cessent.

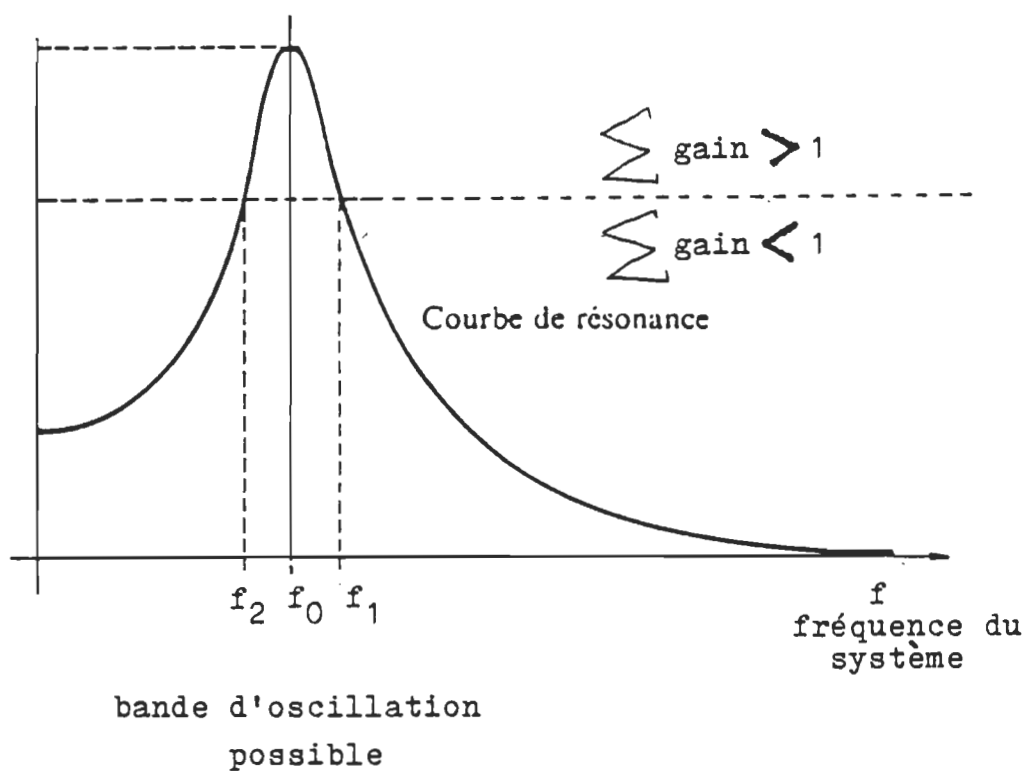


Figure 1.5 Courbe d'amplitude de la cavité. L'atténuation a diminué de trois décibels par rapport au sommet de la courbe.

f_1 , où les oscillations cessent, et ainsi le facteur de qualité Q du système est maintenant connu:

$$Q = \frac{f_0}{f_1 - f_2} \quad (1.7)$$

Ceci est la méthode utilisée pour mesurer la fréquence de résonance et le facteur de qualité.

1.2.2 Remarque sur le facteur de qualité Q

Si à l'intérieur du système résonnant, il y a plusieurs éléments différents qui dissipent de l'énergie, alors l'inverse du facteur de qualité du système sera donné par la somme des rapports de la puissance dissipée par chaque élément sur le produit de la fréquence de résonance ω'_r par l'énergie totale W emmagasinée par le système.

$$\begin{aligned} \frac{1}{Q_{\text{tot}}} &= \sum_n \frac{P_n}{\omega'_r W} \\ &= \sum_n \frac{1}{Q_n} \end{aligned} \quad (1.8)$$

où P_n est la puissance dissipée par le $n^{\text{ième}}$ élément du système et Q_n est le facteur de qualité dû au $n^{\text{ième}}$ élément du système. Donc, première remarque, les inverses des facteurs de qualité sont additifs.

En notation complexe, la dépendance temporelle des champs est donnée par l'exponentielle suivante.

$$e^{i\omega t} = e^{-\omega'' t} e^{i\omega' t} \quad (1.9)$$

où

$$\omega = \omega' + i\omega'' \quad (1.10)$$

ω : fréquence de résonance complexe du système
amorti

Les énergies électrique et magnétique sont proportionnelles aux carrés des champs respectifs, d'où l'atténuation de l'énergie électromagnétique totale sera proportionnelle à l'exponentielle de moins deux fois le produit de la partie imaginaire de la fréquence de résonance complexe par le temps,

$$e^{-2\omega'' t} \quad (1.11)$$

Si, à l'instant $t=0$, un système forcé ($\omega''=0$) est laissé à lui-même, alors l'énergie électromagnétique emmagasinée à l'intérieur de ce système sera égale au produit de l'énergie au temps $t=0$ par l'exponentielle décroissante de l'équation (1.11)

$$W(t) = W(0) e^{-2\omega'' t} \quad (1.12)$$

La puissance dissipée dans le système amorti est égale au négatif du taux de variation de l'énergie emmagasinée par rapport au temps. (La puissance dissipée est une quantité positive)

$$\begin{aligned}
 P(t) &= - \frac{dW(t)}{dt} \\
 &= 2\omega'' W(0) e^{-2\omega'' t}
 \end{aligned}
 \tag{1.13}$$

Ainsi la puissance dissipée dans le système amorti à l'instant $t=0$ est donnée par

$$P(0) = 2\omega'' W(0) \tag{1.14}$$

La transition du système forcé au système amorti se produit à l'instant $t=0$. Par conséquent, l'énergie et la puissance dissipée par le système amorti à cet instant, doivent être égales aux quantités correspondantes du système forcé. C'est-à-dire

$P(0)=P$; puissance dissipée dans le système forcé

$W(0)=W$; énergie emmagasinée dans le système forcé

On a donc

$$P = 2\omega'' W \tag{1.15}$$

Substituons l'équation (1.15) dans la définition du facteur de qualité, équation (1.5), ce qui donne

$$\begin{aligned}
 Q &= \frac{\omega_r'}{2\omega''} \\
 &\approx \frac{\omega'}{2\omega''}
 \end{aligned}
 \tag{1.16}$$

Donc, seconde remarque, le facteur de qualité se détermine aussi à partir d'un système amorti. De plus, des équations (1.10) et (1.16), on obtient une relation importante entre le facteur de qualité Q , la fréquence de résonance ω' et la fréquence de résonance complexe.

$$\omega \approx \omega' (1 + 1/2Q) \tag{1.17}$$

De l'équation (1.16), on obtient l'expression pour la déviation du facteur de qualité

$$\frac{1}{2} \delta \left(\frac{1}{Q} \right) \approx \frac{\delta \omega''}{\omega'} \tag{1.18}$$

Nous aurons besoin de ces équations, dans des calculs à venir au cours des prochains chapitres.

1.3 Cavités idéale et non idéale

Les mesures de permittivité s'effectuent avec une cavité cylindrique qui a des parois de conductivité finie, est couplée à un circuit externe et possède un tube d'insertion conducteur (c'est à dire les deux ouvertures cylindrique

d'insertion) pour introduire l'échantillon (figure 1.1). L'équation caractéristique serait trouvée normalement en solutionnant les équations de Maxwell à l'intérieur de la cavité en question, mais pour une telle cavité, ceci est un problème mathématique beaucoup trop difficile à résoudre. Habituellement on simplifie le problème en supposant que la cavité cylindrique est une cavité idéale, c'est-à-dire, parfaitement conductrice et complètement fermée. L'équation caractéristique pour la cavité idéale est précisément connue. Nous donnerons son traitement mathématique dans le chapitre II.

Il est évident qu'en utilisant l'équation caractéristique de la cavité idéale pour la cavité non idéale, nous obtiendrons des erreurs sur les mesures de la permittivité. En comparant les mesures obtenues de cette façon avec celles tirées d'autres méthodes [4], [5], on s'aperçoit qu'on introduit ainsi une erreur relative approximative de 5 % sur la valeur de la permittivité.

Dans le but d'obtenir des mesures de permittivité plus précises, nous inclurons dans nos calculs les effets dûs aux conditions non idéales. En général la façon la plus simple de faire cela, c'est de calculer la déviation du facteur de qualité et la déviation relative de la fréquence de résonance par rapport à la cavité idéale, produite par telle condition

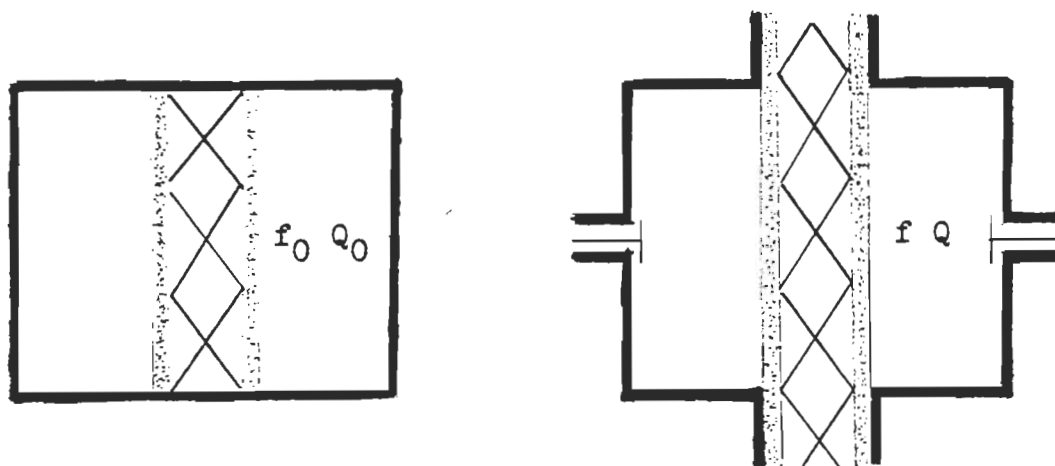


Figure 1.6 Cavités idéale et non idéale.

non idéale. Connaissant ces déviations, on peut transformer la fréquence de résonance f et le facteur de qualité Q mesurés pour la cavité non idéale, en f_0 et Q_0 correspondant aux quantités respectives de la cavité idéale (figure 1.6). Ensuite en utilisant l'équation caractéristique de la cavité idéale, on obtient des mesures précises de la permittivité à partir d'une cavité non idéale.

Dans le chapitre III nous obtiendrons une équation caractéristique exacte qui inclut la conductivité de la paroi circulaire, et la déviation du facteur de qualité produite par la conductivité des parois du haut et du bas.

Dans le chapitre IV, nous donnerons la déviation de fréquence de résonance complexe, due aux trous d'insertion par rapport à la cavité idéale. Ensuite pour comparer avec la littérature, nous calculerons les corrections relatives de la permittivité à effectuer, lorsqu'on utilise l'équation caractéristique de la cavité idéale obtenue de la théorie des perturbations (équation 2.123).

Dans le chapitre V, nous donnerons et expliquerons le programme informatique utilisé pour calculer précisément la permittivité d'un échantillon à partir de la fréquence de résonance complexe d'une cavité de conductivité finie et possédant un tube d'insertion conducteur.

Le chapitre VI, finalement, sera consacré aux résultats numériques et à leur discussion.

CHAPITRE II

CAVITE CYLINDRIQUE IDEALE (MODE TM)

2.1 Equations de Maxwell

Dans ce chapitre, nous donnons la théorie pour une cavité cylindrique idéale, c'est-à-dire parfaitement conductrice, complètement fermée et vibrant dans un mode transverse magnétique $TM(H_z=0)$. L'intérieur de la cavité qui nous intéresse est entièrement ou partiellement occupé par un ou plusieurs diélectriques homogènes, isotropes et linéaires. Nous débutons avec un bref rappel des équations de Maxwell; ensuite, nous devons solutionner ces équations pour l'intérieur d'un tube parfaitement conducteur. Et finalement à partir, de ces résultats, nous obtiendrons la théorie pour la cavité cylindrique idéale. Le comportement des champs électromagnétiques est entièrement décrit, et d'une façon très élégante, par les équations de Maxwell^[6]. Ces dernières sont données ci-dessous:

$$\text{rot } \mathbf{h}(\mathbf{r}, t) = \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{d}(\mathbf{r}, t) + \mathbf{j}(\mathbf{r}, t) \qquad \text{div } \mathbf{b}(\mathbf{r}, t) = 0$$

(2.1)

$$\text{rot } \mathbf{e}(\mathbf{r}, t) = - \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{b}(\mathbf{r}, t) \qquad \text{div } \mathbf{d}(\mathbf{r}, t) = \rho(\mathbf{r}, t)$$

où

$\mathbf{j}(\mathbf{r}, t)$: densité de courant libre

$\rho(\mathbf{r}, t)$: densité de charge libre

$\mathbf{e}(\mathbf{r}, t), \mathbf{h}(\mathbf{r}, t)$: champs électrique et magnétique

$\mathbf{d}(\mathbf{r}, t), \mathbf{b}(\mathbf{r}, t)$: déplacement électrique et
induction magnétique

Ces équations sont des postulats de base de la théorie électromagnétique; elles doivent donc être admises sans démonstration. Leur justification est constituée par l'ensemble des données expérimentales sur des phénomènes électromagnétiques qui sont à la disposition de la physique moderne.

Si l'on utilise la notation complexe et que l'on cherche des solutions séparables comme dans l'équation (2.2),

$$\mathbf{h}(\mathbf{r}, t) = \text{Re } (\mathbf{H}(\mathbf{r}) e^{i\omega t}) \qquad (2.2)$$

et de même pour les autres variables de champ et de source, nous obtenons facilement les équations suivantes:

$$\begin{aligned} \text{rot } \mathbf{H}(\mathbf{r}) &= i\omega \mathbf{D}(\mathbf{r}) + \mathbf{J}(\mathbf{r}) & \text{div } \mathbf{B}(\mathbf{r}) &= 0 \\ \text{rot } \mathbf{E}(\mathbf{r}) &= -i\omega \mathbf{B}(\mathbf{r}) & \text{div } \mathbf{D}(\mathbf{r}) &= \mathbf{P}(\mathbf{r}) \end{aligned} \qquad (2.3)$$

où

$H(\mathbf{r}), E(\mathbf{r})$ etc. sont en général complexes

$P(\mathbf{r})$ est l'amplitude complexe de la densité de charge libre.

On considère des matériaux homogènes, isotropes et linéaires dans lesquels il y a seulement des courants de conduction. Pour ces matériaux, les relations suivantes sont satisfaites.

$$D(\mathbf{r}) = \epsilon E(\mathbf{r}) \quad B(\mathbf{r}) = \mu H(\mathbf{r}) \quad J(\mathbf{r}) = \sigma E(\mathbf{r}) \quad (2.4)$$

où

ϵ : est la permittivité

μ : est la perméabilité

σ : est la conductivité

ϵ, μ, σ sont uniformes pour chaque matériau.

En général ϵ, μ, σ dépendent de la fréquence complexe.

Les équations de Maxwell qui décrivent les champs électromagnétiques à l'intérieur de chaque matériau peuvent donc s'exprimer seulement en termes du champ électrique $E(\mathbf{r})$ et magnétique $H(\mathbf{r})$, dans le cas qui nous occupe.

$$\text{rot } H(\mathbf{r}) = (i\omega\epsilon + \sigma) E(\mathbf{r}) \quad (2.5a) \quad \text{div } H(\mathbf{r}) = 0 \quad (2.5b)$$

$$\text{rot } E(\mathbf{r}) = -i\omega\epsilon H(\mathbf{r}) \quad (2.6a) \quad \text{div } E(\mathbf{r}) = \frac{P(\mathbf{r})}{\epsilon} \quad (2.6b)$$

En prenant le rotationnel des équations (2.5a), (2.6a) et en utilisant ensuite les équations (2.5b) et (2.6b), on obtient les équations d'onde pour le champ électrique $\mathbf{E}(\mathbf{r})$ et magnétique $\mathbf{H}(\mathbf{r})$.

$$\text{Lap } \mathbf{H}(\mathbf{r}) - i\omega\mu(\sigma + i\omega\epsilon)\mathbf{H}(\mathbf{r}) = 0 \quad (2.7)$$

$$\text{Lap } \mathbf{E}(\mathbf{r}) - i\omega\mu(\sigma + i\omega\epsilon)\mathbf{E}(\mathbf{r}) = 0 \quad (2.8)$$

où Lap est l'opérateur laplacien

En prenant la divergence de l'équation (2.5a) et en utilisant l'identité suivante,

$$\text{div} (\text{rot } \mathbf{A}(\mathbf{r})) \equiv 0 \quad (2.9)$$

on obtient une équation contenant la divergence du champ électrique $\mathbf{E}(\mathbf{r})$.

$$(i\omega\epsilon + \sigma) \text{div } \mathbf{E}(\mathbf{r}) = 0 \quad (2.10)$$

Si l'on compare avec l'équation (2.6b), nous devons conclure que pour le cas considéré, la densité de charge libre est nulle à l'intérieur de chaque matériau.

$$\mathbf{P}(\mathbf{r}) = 0 \quad (2.11)$$

On définit la permittivité efficace comme étant égale à la différence entre la permittivité ordinaire et le nombre complexe i , multiplié par le quotient de la conductivité sur

la fréquence de résonance complexe.

$$\epsilon = \epsilon - i (\sigma/\omega) \quad (2.12)$$

Cette permittivité inclut les effets produits par conductivité ohmique, contrairement à la permittivité ordinaire ϵ . On appelle parfois cette quantité la permittivité complexe, mais cette étiquette porte à confusion puisque déjà la permittivité ϵ est une quantité complexe.

$$\epsilon = \epsilon' - i\epsilon'' \quad (2.13)$$

où ϵ' et ϵ'' sont des nombres réels positifs.

Généralement, lorsqu'on effectue des mesures de permittivité, c'est la mesure de la permittivité efficace qu'on obtient, car les effets dus à la conductivité et à la permittivité ordinaire ne sont pas distinguables. Par contre, les matériaux qui nous intéressent ont une conductivité si faible que ces deux permittivités sont pratiquement égales.

En substituant la définition de permittivité efficace, dans les équations d'onde et de Maxwell, nous faisons disparaître le terme de la permittivité ordinaire ϵ et de la conductivité σ .

$$\text{rot } \mathbf{H}(\mathbf{r}) = i\omega\epsilon\mathbf{E}(\mathbf{r}) \quad \text{div } \mathbf{H}(\mathbf{r}) = 0 \quad (2.14)$$

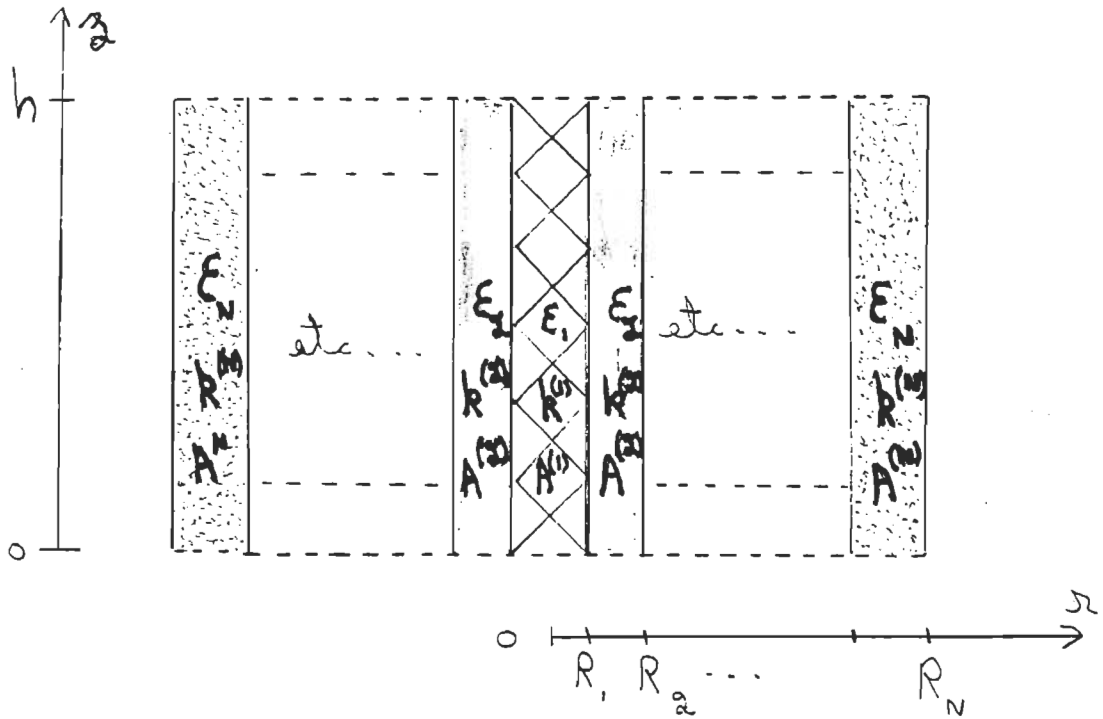


Figure 2.1 Tube parfaitement conducteur contenant N matériaux homogènes, isotropes et linéaires.

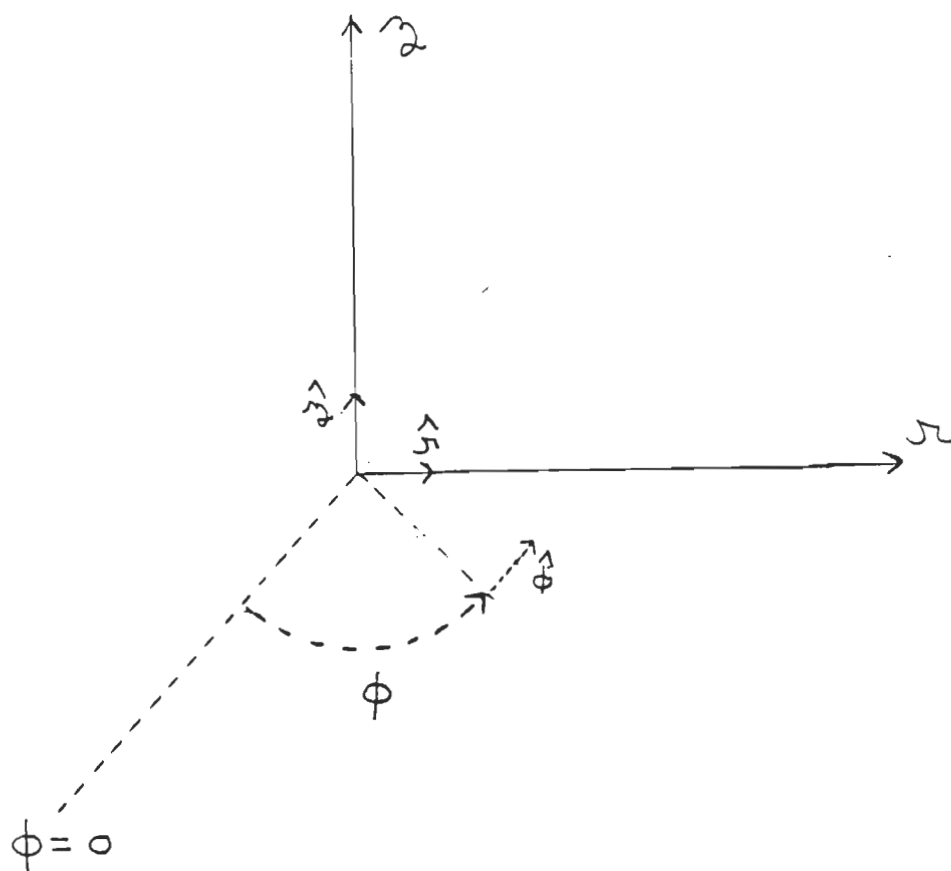


Figure 2.2 Coordonnées cylindriques.

$$\text{rot } \mathbf{E}(\mathbf{r}) = -i\omega\mu\mathbf{H}(\mathbf{r}) \qquad \text{div } \mathbf{E}(\mathbf{r}) = 0 \qquad (2.15)$$

$$\text{Lap } \mathbf{H}(\mathbf{r}) + \omega^2\mu\epsilon\mathbf{H}(\mathbf{r}) = 0 \qquad (2.16)$$

$$\text{Lap } \mathbf{E}(\mathbf{r}) + \omega^2\mu\epsilon\mathbf{E}(\mathbf{r}) = 0 \qquad (2.17)$$

Nous aurons à solutionner ces équations pour déterminer les champs électromagnétiques qui peuvent exister à l'intérieur du tube conducteur de la cavité idéale.

2.2 Guide d'ondes circulaire

Soit un tube cylindrique aux parois parfaitement conductrices de rayon R_N (guide d'ondes circulaire). L'intérieur du tube est occupé par un ou plusieurs matériaux homogènes, isotropes et linéaires, dans lesquels se trouvent uniquement des courants de conduction (figure 2.1).

A l'intérieur de chaque matériau, les champs électromagnétiques doivent satisfaire les équations (2.14) à (2.17) inclusivement. Nous allons résoudre ces équations, lorsqu'elles seront exprimées en coordonnées cylindriques (figure 2.2); pour ce faire nous utiliserons la méthode de séparation de variables. Ces solutions générales devront satisfaire la condition de parfait conducteur à $r=R_N$, ainsi que les conditions de continuité entre deux matériaux. Une

fois celles-ci satisfaites, nous trouverons l'équation caractéristique, c'est-à-dire la relation théorique qui existe entre la permittivité efficace ϵ et la fréquence de résonance complexe ω . Ensuite, nous en obtiendrons la déviation relative du nombre d'ondes produite par l'introduction de matériaux ayant de petits rayons par rapport au guide d'ondes circulaire. Finalement, nous calculerons le facteur de qualité dû aux pertes diélectriques et ohmiques des matériaux placés à l'intérieur du guide d'ondes circulaires. Tous ces calculs sont effectués pour les modes TM ($H_z=0$).

2.2.1 Solution en coordonnées cylindriques

Nous allons exprimer les équations de Maxwell (2.14) et (2.15) en coordonnées cylindriques, et ensuite les solutionner. En coordonnées cylindriques les opérateurs Laplacien, divergence et rotationnel agissent comme suit[7]:

$$\text{Lap } f = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial f}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 f}{\partial \phi^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} \quad (2.18)$$

$$\text{div } \mathbf{A} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \mathbf{A}_r \right) + \frac{1}{r} \frac{\partial \mathbf{A}_\phi}{\partial \phi} + \frac{\partial \mathbf{A}_z}{\partial z} \quad (2.19)$$

$$\text{rot } \mathbf{A} = \left(\frac{1}{r} \frac{\partial \mathbf{A}_z}{\partial \phi} - \frac{\partial \mathbf{A}_\phi}{\partial z} \right) \underline{\mathbf{r}} + \left(\frac{\partial \mathbf{A}_r}{\partial z} - \frac{\partial \mathbf{A}_z}{\partial r} \right) \underline{\phi} + \frac{1}{r} \left(\frac{\partial (r \mathbf{A}_\phi)}{\partial r} - \frac{\partial \mathbf{A}_r}{\partial \phi} \right) \underline{\mathbf{z}} \quad (2.20)$$

où

$$f = f(r, \phi, z)$$

$$\mathbf{A} = A_r \underline{\mathbf{r}} + A_\phi \underline{\boldsymbol{\phi}} + A_z \underline{\mathbf{z}}$$

$\underline{\mathbf{r}}, \underline{\boldsymbol{\phi}}, \underline{\mathbf{z}}$: vecteurs unitaires

Par conséquent, les équations de Maxwell (2.14) et (2.15) exprimées en coordonnées cylindriques donnent ceci:

$$\frac{1}{r} \frac{\partial H_z}{\partial \phi} - \frac{\partial H_\phi}{\partial z} = i\omega\epsilon E_r \quad (2.21)$$

$$\frac{1}{r} \frac{\partial E_z}{\partial \phi} - \frac{\partial E_\phi}{\partial z} = -i\omega\mu H_r \quad (2.22)$$

$$\frac{\partial H_r}{\partial z} - \frac{\partial H_z}{\partial r} = i\omega\epsilon E_\phi \quad (2.23)$$

$$\frac{\partial E_r}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial r} = -i\omega\mu H_\phi \quad (2.24)$$

$$\frac{H_\phi}{r} + \frac{\partial H_\phi}{\partial r} - \frac{1}{r} \frac{\partial H_r}{\partial \phi} = i\omega\epsilon E_z \quad (2.25)$$

$$\frac{E_\phi}{r} + \frac{\partial E_\phi}{\partial r} - \frac{1}{r} \frac{\partial E_r}{\partial \phi} = -i\omega\mu H_z \quad (2.26)$$

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r H_r) + \frac{1}{r} \frac{\partial H_\phi}{\partial \phi} + \frac{\partial H_z}{\partial z} = 0 \quad (2.27)$$

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r E_r) + \frac{1}{r} \frac{\partial E_\phi}{\partial \phi} + \frac{\partial E_z}{\partial z} = 0 \quad (2.28)$$

Dans ces équations, on prend $H_z=0$, car ce sont les modes de vibrations TM qui nous intéressent en premier lieu.

L'équation d'onde (2.17) pour la composante E_z , en coordonnées cylindriques est:

$$\left[\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \phi^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right] E_z + \omega^2 \mu \epsilon E_z = 0 \quad (2.29)$$

En utilisant la méthode de séparation de variables, c'est-à-dire cherchant une solution du type

$$E_z = R(r) \phi(\phi) Z(z) \quad (2.30)$$

on obtient facilement la solution suivante:

$$E_z = \sum_{n=1}^{\infty} [A_n J_n(k_{rn}r) + B_n Y_n(k_{rn}r)] \cos(n\phi) [C_n \exp(ik_{zn}z) + D_n \exp(-ik_{zn}z)] \quad (2.31)$$

où

$J_n(k_{rn})$: fonction de Bessel d'ordre n

$Y_n(k_{rn})$: fonction de Neumann d'ordre n

n : entier non négatif

k_{rn}, k_{zn} : nombres d'ondes suivant r et z
respectivement

$$k_{rn}^2 + k_{zn}^2 = \omega^2 \mu \epsilon \quad (2.32)$$

Les solutions pour les autres composantes de champs sont plus difficiles à obtenir. Nous avons donc procédé comme suit.

Effectuons $\partial/\partial r$ de r^2 multiplié par (2.25) et $\partial/\partial \phi$ de r

multiplié par (2.27), ce qui donne

$$\frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial}{\partial r} \right) r H_{\phi} - \frac{\partial^2 r H_{\phi}}{\partial \phi \partial r} = i \omega \epsilon \frac{\partial (r^2 E_z)}{\partial r} \quad (2.33)$$

$$\frac{\partial^2 r H_{\phi}}{\partial r \partial \phi} + \frac{\partial^2 H_{\phi}}{\partial \phi^2} = 0 \quad (2.34)$$

d'où

$$\frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial}{\partial r} r H_{\phi} \right) + \frac{\partial^2 H_{\phi}}{\partial \phi^2} - i \omega \epsilon \left(2 r E_z + r^2 \frac{\partial E_z}{\partial r} \right) = 0 \quad (2.35)$$

Des équations (2.24) et (2.21), on obtient

$$\frac{\partial E_z}{\partial r} = i \omega \mu H_{\phi} - \frac{1}{i \omega \epsilon} \frac{\partial^2 H_{\phi}}{\partial z^2} \quad (2.36)$$

Substituons l'équation (2.36) dans l'équation (2.35), et divisons par r :

$$\left(\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \phi^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) r H_{\phi} + \omega^2 \mu \epsilon r H_{\phi} = 2 i \omega \epsilon E_z \quad (2.37)$$

De façon similaire, en utilisant $\partial/\partial r$ de r^2 multiplié par (2.27) et $\partial/\partial \phi$ de r multiplié (2.25) et ainsi de suite, on obtient

$$\left(\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \phi^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) r H_r + \omega^2 \mu \epsilon r H_r = 0 \quad (2.38)$$

Si on utilise la méthode de séparation de variables, les solutions générales seront:

$$H_r = \sum_{n=1}^{\infty} (1/r) [c_{1n} J_n(K_{rn}r) + c_{2n} Y_n(K_{rn}r)]$$

$$[c_{3n} \cos(n\phi) + c_{4n} \sin(n\phi)]$$

$$[c_{5n} \exp(iK_{zn}z) + c_{6n} \exp(-iK_{zn}z)] \quad (2.39)$$

$$H_{\phi} = \sum_{n=1}^{\infty} (1/r) [c_{7n} J_n(\lambda_{rn}r) + c_{8n} Y_n(\lambda_{rn}r)]$$

$$[c_{9n} \cos(n\phi) + c_{10n} \sin(n\phi)]$$

$$[c_{11n} \exp(i\lambda_{zn}z) + c_{12n} \exp(-i\lambda_{zn}z)]$$

$$- \sum_{n=1}^{\infty} (i\omega\epsilon/K_{rn}) [A_n J_{n-1}(K_{rn}r) + B_n Y_{n-1}(K_{rn}r)]$$

$$\cos(n\phi) [C_n \exp(ik_{zn}z) + D_n \exp(-ik_{zn}z)] \quad (2.40)$$

où

$$K_{rn}^2 + K_{zn}^2 = \omega^2 \mu \epsilon$$

$$\lambda_{rn}^2 + \lambda_{zn}^2 = \omega^2 \mu \epsilon$$

λ, K, k : nombres d'ondes

c_{ij} : constantes à déterminer

Substituons les équations (2.39), (2.40) dans les équations (2.23) et (2.21) respectivement. Nous obtenons:

$$E_{\phi} = \sum_{n=1}^{\infty} (iK_{zn} / r i \omega \epsilon) [c_{1n} J_n(K_{rn}r) + c_{2n} Y_n(K_{rn}r)]$$

$$[c_{3n} \cos(n\phi) + c_{4n} \sin(n\phi)]$$

$$[c_{5n} \exp(iK_{zn}z) - c_{6n} \exp(-iK_{zn}z)] \quad (2.41)$$

$$E_r = \sum_{n=1}^{\infty} (-i\lambda_{zn} / r i \omega \epsilon) [c_{7n} J_n(\lambda_{rn}r) + c_{8n} Y_n(\lambda_{rn}r)]$$

$$[c_{9n} \cos(n\phi) + c_{10n} \sin(n\phi)]$$

$$[c_{11n} \exp(i\lambda_{zn}z) - c_{12n} \exp(-i\lambda_{zn}z)]$$

$$+ \sum_{n=1}^{\infty} (iK_{zn} / K_{rn}) [A_n J_{n-1}(K_{rn}r) + B_n Y_{n-1}(K_{rn}r)]$$

$$\cos(n\phi) [C_n \exp(iK_{zn}z) - D_n \exp(-iK_{zn}z)] \quad (2.42)$$

Les solutions pour les champs électromagnétiques que nous avons trouvées, (voir équations (2.31), (2.39), (2.40), (2.41) et (2.42)), comportent trois séries différentes de constantes à déterminer; nous allons en éliminer deux.

Substituons les équations (2.31), (2.39) et (2.41) dans l'équation (2.22), ensuite substituons les équations (2.31), (2.40) et (2.42) dans l'équation (2.24); multiplions ceci par $\sin(n\phi)$ et $\cos(n\phi)$ respectivement, et intégrons entre $\phi=0$ et $\phi=2\pi$. Nous obtenons ce qui suit:

$$\begin{aligned}
& [c_{1n} J_n(K_{rn}r) + c_{2n} Y_n(K_{rn}r)] c_{4n} \\
& [c_{5n} \exp(ik_{zn}z) + c_{6n} \exp(-ik_{zn}z)] (K_{rn}^2 / i\omega\xi) \\
& = -n [A_n J_n(K_{rn}r) + B_n Y_n(K_{rn}r)] \\
& [C_n \exp(ik_{zn}z) + D_n \exp(-ik_{zn}z)] \quad (2.43)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& [c_{7n} J_n(\lambda_{rn}r) + c_{8n} Y_n(\lambda_{rn}r)] c_{9n} \\
& [c_{11n} \exp(i\lambda_{zn}z) + c_{12n} \exp(-i\lambda_{zn}z)] (-\lambda_{rn}^2 / i\omega\xi) \\
& = K_{rn}r [A_n \{J'_n(K_{rn}r) - J_{n-1}(K_{rn}r)\} \\
& \quad + B_n \{Y'_n(K_{rn}r) - Y_{n-1}(K_{rn}r)\}] \\
& [C_n \exp(ik_{zn}z) + D_n \exp(-ik_{zn}z)] \quad (2.44)
\end{aligned}$$

Ces équations doivent être vérifiées pour toutes valeurs de r et de z . De la première équation, on trouve donc

$$\begin{aligned}
K_{rn} &= K_{rn} \quad K_{zn} = k_{zn} \quad c_{2n} = -\frac{B_n i\omega\xi n}{K_{rn}^2} \quad c_{4n} = 1 \\
c_{5n} &= C_n \quad c_{6n} = D_n \quad c_{1n} = -\frac{A_n i\omega\xi n}{K_{rn}^2} \quad (2.45)
\end{aligned}$$

De la seconde équation et des identités suivantes,

$$\begin{aligned}
x \{J'_n(x) - J_{n-1}(x)\} &= -nJ_n(x) \\
x \{Y'_n(x) - Y_{n-1}(x)\} &= -nY_n(x) \quad (2.46)
\end{aligned}$$

on trouve

$$\begin{aligned} \lambda_{rn} &= k_{rn} & \lambda_{zn} &= k_{zn} & c_{8n} &= \frac{B_n i \omega \epsilon_n}{k_{rn}^2} & c_{9n} &= 1 \\ c_{11n} &= C_n & c_{12n} &= D_n & c_{7n} &= \frac{A_n \omega \epsilon_n}{k_{rn}^2} \end{aligned} \quad (2.47)$$

En procédant de la même façon que ci-haut, mais en multipliant cette fois par $\cos(n\theta)$ et $\sin(n\theta)$ respectivement, on obtient

$$c_{3n} = c_{10n} = 0 \quad (2.48)$$

Par conséquent, les solutions des équations de Maxwell en coordonnées cylindriques pour le n ième mode de vibrations TM sont données par les équations suivantes:

$$\begin{aligned} E_z &= [A_n J_n(k_r r) + B_n Y_n(k_r r)] \cos(n\theta) \\ &\quad [C_n \exp(ik_z z) + D_n \exp(-ik_z z)] \end{aligned} \quad (2.49)$$

$$\begin{aligned} E_\theta &= \frac{-ik_z}{rk_r^2} [A_n J_n(k_r r) + B_n Y_n(k_r r)] \sin(n\theta) \\ &\quad [C_n \exp(ik_z z) - D_n \exp(-ik_z z)] \end{aligned} \quad (2.50)$$

$$\begin{aligned} E_r &= \frac{ik_z}{k_r} [A_n J'_n(k_r r) + B_n Y'_n(k_r r)] \cos(n\theta) \\ &\quad [C_n \exp(ik_z z) - D_n \exp(-ik_z z)] \end{aligned} \quad (2.51)$$

$$H_{\phi} = \frac{-(i\omega\epsilon)}{k_r} [A_n J'_n(k_r r) + B_n Y'_n(k_r r)] \cos(n\phi) \\ [C_n \exp(ik_z z) + D_n \exp(-ik_z z)] \quad (2.52)$$

$$H_r = \frac{-n (i\omega\epsilon)}{rk_r^2} [A_n J_n(k_r r) + B_n Y_n(k_r r)] \sin(n\phi) \\ [C_n \exp(ik_z z) + D_n \exp(-ik_z z)] \quad (2.53)$$

où

$$k_r^2 + k_z^2 = \omega^2 \mu \epsilon \quad (2.54)$$

On omet l'indice n à k_r et k_z lorsqu'il n'y a pas de confusion possible.

2.2.2 Conditions de parfait conducteur et de continuité

Nous venons de solutionner les équations de Maxwell lorsqu'elles sont exprimées en coordonnées cylindriques. Maintenant, ces solutions doivent satisfaire, d'une part, la condition de parfait conducteur à $r=R_N$ du tube parfaitement conducteur, et, d'autre part, les conditions de continuité entre deux matériaux adjacents (figure 2.1).

Pour une paroi parfaitement conductrice, E et H sont respectivement perpendiculaire et tangent à la surface

conductrice (annexe B). Par conséquent à la surface du tube parfaitement conducteur, les champs électriques E_z , E_ϕ et le champ magnétique H_r doivent être nuls.

$$E_z = E_\phi = 0 \quad \text{et} \quad H_r = 0 \quad \text{à} \quad r = R_N \quad (2.55)$$

Ces conditions sont satisfaites lorsque

$$A_n^{(N)} J_{nNN} + B_n^{(N)} Y_{nNN} = 0 \quad (2.56)$$

où

(N) réfère à la région du N ième diélectrique

$$J_{ijm} = J_i(k_r^{(j)} R_m)$$

$$Y_{ijm} = Y_i(k_r^{(j)} R_m)$$

l'indice supérieur j entre parenthèses indique que la quantité correspond à celle du j ième matériau (figure 2.1).

$\alpha)$ Un seul matériau

Si un seul matériau trouve à l'intérieur du guide d'onde circulaire, le facteur d'amplitude $B_n^{(1)}$ est égal à zéro, car les champs ne sont pas infinis à $r=0$. D'où:

$$k_r^{(1)} = x_{nm} / R_1 \quad (2.58)$$

où

$$k_r^{(1)} = [-(k_z^{(1)})^2 + \omega^2 \mu_1 \epsilon_1]^{1/2}$$

x_{nm} est le m ième zéro de $J_n(x)$

Les champs électromagnétiques sont donc donnés par les équations (2.49) à (2.53), avec la condition (2.58). Ces champs sont appelés des modes TM_{nm} .

B) Plusieurs matériaux

Si plusieurs matériaux se trouvent à l'intérieur du guide d'ondes circulaires, alors il faut satisfaire les conditions de continuité suivantes:

$$\begin{aligned} \mu_2 H_2^p &= \mu_1 H_1^p & H_2^t &= H_1^t \\ \epsilon_2 E_2^p &= \epsilon_1 E_1^p & E_2^t &= E_1^t \end{aligned} \quad (2.59)$$

Les indices supérieurs p et t indiquent ici les composantes perpendiculaire et tangentielle à l'interface considérée. Ces équations de continuité ont été dérivées dans l'annexe B.

En effectuant $\partial^2/\partial z^2$ des équations de continuité appliquées au cas du tube parfaitement conducteur, on trouve facilement

$$k_z^{(j)} = k_z^{(j+1)} \quad j = 1, 2, \dots, N-1 \quad (2.60)$$

Donc, le nombre d'ondes k_z à l'intérieur de chacun des matériaux est le même. Si les perméabilités μ_j sont égales à celle du vide, les équations de continuité vont nous donner

Continuité de E_z :

$$\begin{aligned} A_n^{(j)} J_{njj} + B_n^{(j)} Y_{njj} \\ = A_n^{(j+1)} J_{n,j+1,j} + B_n^{(j+1)} Y_{n,j+1,j} \end{aligned} \quad (2.61)$$

Continuité de E_ϕ :

$$\begin{aligned} \frac{-nk_z}{(k_r^{(j)})^2} [A_n^{(j)} J_{njj} + B_n^{(j)} Y_{njj}] \\ = \frac{-nk_z}{(k_r^{(j+1)})^2} [A_n^{(j+1)} J_{n,j+1,j} + B_n^{(j+1)} Y_{n,j+1,j}] \end{aligned} \quad (2.62)$$

Continuité de H_r :

$$\begin{aligned} \frac{\epsilon_j n}{(k_r^{(j)})^2} [A_n^{(j)} J_{njj} + B_n^{(j)} Y_{njj}] \\ = \frac{\epsilon_{j+1} n}{(k_r^{(j+1)})^2} [A_n^{(j+1)} J_{n,j+1,j} + B_n^{(j+1)} Y_{n,j+1,j}] \end{aligned} \quad (2.63)$$

Continuité de E_r :

$$\begin{aligned}
& \frac{\epsilon_j k_z}{k_r(j)} [A_n^{(j)} J'_{njj} + B_n^{(j)} Y'_{njj}] \\
& = \frac{\epsilon_{j+1} k_z}{(k_r(j+1))} [A_n^{(j+1)} J'_{n, j+1, j} + B_n^{(j+1)} Y'_{n, j+1, j}]
\end{aligned} \tag{2.64}$$

Continuité de H_ϕ :

$$\begin{aligned}
& \frac{\epsilon_j}{k_r(j)} [A_n^{(j)} J'_{njj} + B_n^{(j)} Y'_{njj}] \\
& = \frac{\epsilon_{j+1}}{k_r(j+1)} [A_n^{(j+1)} J'_{n, j+1, j} + B_n^{(j+1)} Y'_{n, j+1, j}]
\end{aligned} \tag{2.65}$$

Lorsqu'on substitue l'équation (2.61) dans l'équation (2.63), on obtient:

$$n [A_n^{(j)} J_{njj} + B_n^{(j)} Y_{njj}]$$

$$\left(\frac{\epsilon_j}{(k_r(j))^2} - \frac{\epsilon_{j+1}}{(k_r(j+1))^2} \right) = 0 \tag{2.66}$$

Les équations (2.66) et (2.54) nous amènent à conclure que pour plusieurs matériaux, l'indice "n" du mode TM_{nm} doit être égal à zéro, ou alors le nombre d'ondes k_z est nul.

$$n = 0 \quad \text{ou} \quad k_z = 0 \tag{2.67}$$

Ces deux quantités apparaissant dans l'expression (2.50) du champ électrique E_ϕ , cette composante de champ pour un

mode TM sera toujours nulle lorsque plusieurs matériaux se trouvent à l'intérieur du guide d'ondes circulaire.

En résumé, pour plusieurs matériaux, l'indice "n" du mode TM_{nm} ou bien le nombre d'ondes k_z , doit être égal à zéro. Les nombres d'ondes k_z sont les mêmes à l'intérieur des différents matériaux.

$$k_z(j) = k_z(j+1) \quad (2.68)$$

De plus, les équations de continuité sont données par les deux équations suivantes:

$$\begin{aligned} A_n(j) J_{njj} + B_n(j) Y_{njj} \\ = A_n(j+1) J_{n,j+1,j} + B_n(j+1) Y_{n,j+1,j} \end{aligned} \quad (2.69)$$

$$\frac{\epsilon_j k_r(j+1)}{\epsilon_{j+1} k_r(j)} [A_n(j) J'_{njj} + B_n(j) Y'_{njj}] \quad (2.70)$$

$$= A_n(j+1) J'_{n,j+1,j} + B_n(j+1) Y'_{n,j+1,j}$$

où

$$j = 1, 2, \dots, N-1$$

La condition de parfait conducteur donnait

$$A_n(N) J_{nNN} + B_n(N) Y_{nNN} = 0 \quad (2.71)$$

et les modes TM possibles sont TM_{0m} ou $TM_{nm}(k_z=0)$.

2.2.3 Equation caractéristique

On obtient des équations de continuité (2.69) et (2.70), les relations de récurrence suivantes, pour les facteurs d'amplitude A_n et B_n :

$$\begin{aligned}
 A_n^{(j+1)} = A_n^{(j)} [& 1 + (\pi k_r^{(j+1)} R_j / 2) \\
 & \{ Y'_{n,j+1,j} [J_{njj} - J_{n,j+1,j}] \\
 & + Y_{n,j+1,j} [J'_{n,j+1,j} - \gamma^{(j)} J'_{njj}] \}] \\
 + B_n^{(j)} [& (\pi k_r^{(j+1)} R_j / 2) \\
 & \{ Y_{njj} Y'_{n,j+1,j} - \gamma^{(j)} Y'_{njj} Y_{n,j+1,j} \}] \quad (2.72)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 B_n^{(j+1)} = B_n^{(j)} [& 1 - (\pi k_r^{(j+1)} R_j / 2) \\
 & \{ J'_{n,j+1,j} [Y_{njj} - Y_{n,j+1,j}] \\
 & + J_{n,j+1,j} [Y'_{n,j+1,j} - \gamma^{(j)} Y'_{njj}] \}] \\
 - A_n^{(j)} [& (\pi k_r^{(j+1)} R_j / 2) \\
 & \{ J_{njj} J'_{n,j+1,j} - \gamma^{(j)} J'_{njj} J_{n,j+1,j} \}] \quad (2.73)
 \end{aligned}$$

où

$$\gamma^{(j)} = \frac{\epsilon_j k_r^{(j+1)}}{\epsilon_{j+1} k_r^{(j)}} \quad (2.74)$$

On a utilisé l'identité suivante

$$J_n(x) Y'_n(x) - J'_n(x) Y_n(x) = 2/(\pi x) \quad (2.75)$$

En utilisant ces relations de récurrence, on trouve facilement les facteurs d'amplitude A_n et B_n de la deuxième région:

$$A_n^{(2)} = A_n^{(1)} [1 + (\pi k_r^{(2)} R_1 / 2) \{ Y'_{n21} [J_{n11} - J_{n21}] + Y_{n21} [J'_{n21} - \gamma^{(1)} J'_{n11}] \}] \quad (2.76)$$

$$B_n^{(2)} = -A_n^{(1)} [(\pi k_r^{(2)} R_1 / 2) \{ J_{n11} J'_{n21} - \gamma^{(1)} J'_{n11} J_{n21} \}] \quad (2.77)$$

Si deux matériaux seulement se trouvent à l'intérieur du guide d'ondes circulaire, alors la condition de parfait conducteur,

$$A_n^{(2)} J_{n22} + B_n^{(2)} Y_{n22} = 0 \quad (2.78)$$

nous donne l'équation suivante:

$$\begin{aligned} J_{n22} + (\pi k_r^{(2)} R_1 / 2) [J_{n22} \\ [\{ Y_{n21} J'_{n21} - Y'_{n21} J_{n21} \} \\ + \{ J_{n11} Y'_{n21} - \gamma^{(1)} J'_{n11} Y_{n21} \}] \\ - Y_{n22} \{ J_{n11} J'_{n21} - \gamma^{(1)} J_{n21} J'_{n11} \}] = 0 \end{aligned} \quad (2.79)$$

En utilisant de nouveau l'identité (2.75), on obtient

l'équation caractéristique suivante:

$$\frac{\epsilon_1 k_r^{(2)}}{\epsilon_2 k_r^{(1)}} = \frac{J_{n11} \{J_{n22} Y'_{n21} - Y_{n22} J'_{n21}\}}{J'_{n11} \{J_{n22} Y_{n21} - Y_{n22} J_{n21}\}} \quad (2.80)$$

où

$$(k_r^{(j)})^2 = -k_z^2 + \omega^2 \mu \epsilon \quad (2.81)$$

$$n = 0 \quad \text{ou} \quad k_z = 0$$

Si trois matériaux se trouvent à l'intérieur du guide d'ondes circulaire, alors la condition de parfait conducteur sera

$$A_n^{(3)} J_{n33} + B_n^{(3)} Y_{n33} = 0 \quad (2.82)$$

Substituons les équations (2.72) et (2.73) dans l'équation (2.82). Ensuite, en utilisant l'identité (2.75), on obtient

$$\begin{aligned} A_n^{(2)} [J_{n22} \{ J_{n33} Y'_{n32} - Y_{n33} J'_{n32} \} \\ - \gamma^{(2)} J'_{n22} \{ J_{n33} Y_{n32} - Y_{n33} J_{n32} \}] \\ + B_n^{(2)} [Y_{n22} \{ J_{n33} Y'_{n32} - Y_{n33} J'_{n32} \} \\ - \gamma^{(2)} Y'_{n22} \{ J_{n33} Y_{n32} - Y_{n33} J_{n32} \}] = 0 \end{aligned} \quad (2.83)$$

Si on compare l'équation (2.78) et l'équation (2.83), on conclut que l'équation caractéristique est la même, sauf que J_{n22} et Y_{n22} deviennent

$$J_{n22} \text{ ----> } [J_{n22} \{ J_{n33} Y'_{n32} - Y_{n33} J'_{n32} \} \\ - \gamma^{(2)} J'_{n22} \{ J_{n33} Y_{n32} - Y_{n33} J_{n32} \}] \quad (2.84)$$

$$Y_{n22} \text{ ----> } [Y_{n22} \{ J_{n33} Y'_{n32} - Y_{n33} J'_{n32} \} \\ - \gamma^{(2)} Y'_{n22} \{ J_{n33} Y_{n32} - Y_{n33} J_{n32} \}] \quad (2.85)$$

Pour quatre matériaux, J_{n33} et Y_{n33} vont changer de façon similaire, et ainsi de suite. L'équation caractéristique (2.80), avec, si nécessaire, les changements (2.84), (2.85) etc., donne la relation théorique entre la permittivité efficace ϵ et la fréquence du guide d'ondes circulaire (pour k_z donné).

2.2.4 Déviatiun relative du nombre d'ondes (due aux matériaux)

Lorsqu'on introduit les matériaux à l'intérieur du guide d'ondes circulaires, il se produit une déviation du nombre d'ondes. Nous allons maintenant calculer la déviation du nombre d'ondes k_r , pour le cas où les rayons des matériaux sont beaucoup plus petits que ceux de la cavité.

Si les matériaux à l'intérieur de guide d'ondes ont de petits rayons, c'est-à-dire si

$$R_{N-1} \ll R_N \quad (2.86)$$

alors, en utilisant les approximations des fonctions de Bessel et de Neumann pour de petit arguments (équations (A.13) à (A.16) inclusivement), et prenant $n=0$, les équations de récurrence (2.72) et (2.73) des facteurs d'amplitude A et B deviennent

$$A^{(j+1)} \approx A^{(j)} + B^{(j)} (2/\pi) [\{ \ln (K_r^{(j)} R_j / 2) + \xi \} - \gamma^{(j)} \{ \ln (K_r^{(j+1)} R_j / 2) + \xi \} (K_r^{(j+1)} / K_r^{(j)})] \quad (2.87)$$

$$B^{(j+1)} \approx A^{(j)} [\pi (K_r^{(j+1)} R_j / 2)^2 \{ 1 - \gamma^{(j)} K_r^{(j)} / K_r^{(j+1)} \}] + B^{(j)} \gamma^{(j)} K_r^{(j+1)} / K_r^{(j)} \quad (2.88)$$

où ξ désigne la constante d'Euler.

Puisque le facteur d'amplitude $B^{(1)}$ du centre de guide d'ondes doit être nul, on aura donc les relations de récurrence suivantes:

$$A^{(j+1)} \approx A^{(1)} \quad (2.89)$$

$$B^{(j+1)} \approx \frac{A^{(1)} \pi (K_r^{(j+1)})^2}{4 \epsilon_{j+1}} \sum_{i=1}^j R_i^2 \{ \epsilon_{i+1} - \epsilon_i \} \quad (2.90)$$

Puisque le guide d'ondes est pratiquement rempli par le N^{ième} matériau, on aura

$$k_r^{(N)} R_N = x_{Om} + R_N \delta k_r^{(N)}$$

$$\approx x_{Om} \quad (2.91)$$

Par un développement de Taylor, on obtient

$$J_0(k_r^{(N)} R_N) \approx J_0(x_{Om}) - R_N \delta k_r^{(N)} J_1(x_{Om}) \quad (2.92)$$

$$Y_0(k_r^{(N)} R_N) \approx Y_0(x_{Om}) - R_N \delta k_r^{(N)} Y_1(x_{Om}) \quad (2.93)$$

Ainsi la condition de parfait conducteur à $r=R_N$,

$$A^{(N)} J_{0NN} + B^{(N)} Y_{0NN} = 0 \quad (2.94)$$

devient

$$\begin{aligned} \delta k_r^{(N)} &\approx \frac{B^{(N)} Y_0(x_{Om})}{A^{(N)} R_N \left(J_1(x_{Om}) + \frac{B^{(N)}}{A^{(N)}} Y_1(x_{Om}) \right)} \\ &\approx \frac{\pi Y_0(x_{Om}) x_{Om} k_r^{(N)}}{4 J_1^2(x_{Om}) \epsilon_N} \sum_{j=1}^{N-1} \left(\frac{R}{R_N} \right)^2 \{ \epsilon_{j+1} - \epsilon_j \} \\ &= \frac{k_r^{(N)}}{2 J_1^2(x_{Om}) \epsilon_N} \sum_{j=1}^{N-1} \left(\frac{R}{R_N} \right)^2 \{ \epsilon_{j+1} - \epsilon_j \}. \quad (2.95) \end{aligned}$$

Ceci donne la déviation du nombre d'ondes k_r produite par l'introduction de matériaux de petits rayons dans le guide d'ondes circulaires.

2.3 Cavité idéale

Nous allons maintenant donner la théorie de la cavité idéale, c'est-à-dire une cavité parfaitement conductrice et complètement fermée. Nous commencerons par la distribution des champs à l'intérieur de la cavité cylindrique idéale. Ensuite, nous calculerons l'énergie emmagasinée par la cavité. Finalement, nous déterminerons la déviation relative de fréquence de résonance complexe produite par l'introduction d'une substance dans la cavité.

2.3.1 Distribution des champs

La cavité idéale, par rapport au guide d'ondes circulaire, a deux surfaces parfaitement conductrices supplémentaires qui imposent les restrictions suivantes:

$$E_r = E_\phi = 0 \quad \text{à } z = 0, h \quad (2.96)$$

C'est dire que les champs électriques E_r et E_ϕ sont nuls sur les surfaces parfaitement conductrices situées aux extrémités du corps cylindrique. Les champs électromagnétiques à l'intérieur du guide d'ondes circulaire sont donnés par les équations (2.49) à (2.53) inclusivement. En satisfaisant la condition de parfait conducteur (2.96), il s'avère que pour la cavité idéale, les relations doivent être les

suivantes:

$$C_n = D_n \quad (2.97)$$

$$k_z = \frac{p\pi}{h} \quad (2.98)$$

Par conséquent, la distribution des champs électromagnétiques à l'intérieur de la cavité idéale peut être exprimée par les équations suivantes:

$$E_z = [A_n J_n(k_r r) + B_n Y_n(k_r r)] \cos(n\phi) \cos(p\pi z/h) \quad (2.99)$$

$$E_\phi = \frac{np\pi}{rhk_r^2} [A_n J_n(k_r r) + B_n Y_n(k_r r)] \sin(n\phi) \sin(p\pi z/h) \quad (2.100)$$

$$E_r = -\frac{p\pi}{k_r h} [A_n J'_n(k_r r) + B_n Y'_n(k_r r)] \cos(n\phi) \sin(p\pi z/h) \quad (2.101)$$

$$H_\phi = -\frac{i\omega\epsilon}{k_r} [A_n J'_n(k_r r) + B_n Y'_n(k_r r)] \cos(n\phi) \cos(p\pi z/h) \quad (2.102)$$

$$H_r = -\frac{i\omega\epsilon n}{rk_r^2} [A_n J_n(k_r r) + B_n Y_n(k_r r)] \sin(n\phi) \cos(p\pi z/h) \quad (2.103)$$

où

$$k_r^2 = -(p\pi/h)^2 + \omega^2 \mu\epsilon \quad (2.104)$$

Les champs (2.99)-(2.103) représentent le mode TM_{nmp} . Si nous avons plusieurs matériaux, l'indice "n" du mode TM_{nmp} est

encore égal à zéro; ou alors le nombre d'ondes k_z est nul. Les équations de continuité (2.69) et (2.70), l'équation caractéristique (2.80) et la déviation relative du nombre d'ondes (équation 2.95) restent les mêmes. L'équation caractéristique exprime maintenant une restriction sur la fréquence, puisque k_z est fixé. Chaque triplet d'indice nmp (où m indique le m ième zéro), lorsqu'il satisfait l'équation caractéristique, décrit un mode de vibration possible qu'on appelle TM_{nmp} . D'un point de vue physique, les indices sont interprétés comme suit:

- n : nombre de longueurs d'onde suivant la coordonnée ϕ ;
- m : nombre de noeuds de la fonction radiale;
- p : nombre de demi-longueurs d'onde suivant la coordonnée z .

A partir de maintenant, nous ne considérerons plus que le cas où $n=0$, c'est-à-dire lorsqu'il y a symétrie circulaire.

2.3.2 Energie

Nous allons maintenant calculer l'énergie moyenne (W) emmagasinée à l'intérieur de la cavité cylindrique sous l'effet d'une excitation extérieure (régime forcé). Cette quantité nous sera utile pour effectuer différents calculs, notamment les facteurs de qualité dus à des conditions non idéales.

La cavité cylindrique se comporte comme un système résonnant; en d'autres termes, c'est une sorte d'amplificateur sélectif. Lorsqu'on excite un mode de vibration à une fréquence voisine de celle du mode, l'excitation est fortement amplifiée et ainsi l'énergie électromagnétique vibre presque entièrement dans le mode excité. Par contre, si la fréquence d'excitation est éloignée de la fréquence propre du mode excité, alors ce mode sera complètement atténué, et l'énergie électromagnétique ne s'emmagasinerait pas. Nous supposons que les modes excités dans la cavité sont des modes TM_{omp} dont la distribution des champs est donnée par les équations (2.99) à (2.103).

On démontre^[6] qu'en l'absence d'atténuation (c'est-à-dire $\omega''=0$), la moyenne de l'énergie électromagnétique par cycle et la puissance dissipée sont données par:

$$W = \frac{1}{4} \int dv \{ \epsilon' \mathbf{E}(\mathbf{r}) \cdot \mathbf{E}(\mathbf{r})^* + \mu' \mathbf{H}(\mathbf{r}) \cdot \mathbf{H}(\mathbf{r})^* \} \quad (2.105)$$

$$P = \frac{1}{2} \int dv \{ (\omega' \epsilon'') \mathbf{E}(\mathbf{r}) \cdot \mathbf{E}(\mathbf{r})^* + \omega' \mu'' \mathbf{H}(\mathbf{r}) \cdot \mathbf{H}(\mathbf{r})^* \} \quad (2.106)$$

En utilisant les expressions (2.14) et (2.15) des rotationnels du champ électrique \mathbf{E} et du champ magnétique \mathbf{H} , l'identité

$$\operatorname{div} (\mathbf{A} \times \mathbf{B}) = \mathbf{B} \cdot (\operatorname{rot} \mathbf{A}) - \mathbf{A} \cdot (\operatorname{rot} \mathbf{B}) \quad (2.107)$$

de même que les conditions de parfait conducteur (annexe B) et la condition $\mu = \mu_0$, on trouve essentiellement

$$W = \frac{\mu}{2} \int dv \mathbf{H} \cdot \mathbf{H}^* \quad (2.108)$$

Ainsi, les moyennes des énergies électriques et magnétiques sont égales.

$$\int dv \epsilon' \mathbf{E} \cdot \mathbf{E}^* = \int dv \mu_0 \mathbf{H} \cdot \mathbf{H}^* \quad (2.109)$$

En fait, l'énergie électromagnétique passe continuellement d'une forme à l'autre. Pour un mode de vibration TM_{omp} , le champ magnétique \mathbf{H} est donné par

$$\mathbf{H} = \frac{i\omega\epsilon}{k_r} Z_1(k_r r) \cos(p\pi z/h) \hat{\phi} \quad (2.110)$$

où

$$Z_1(k_r r) = A J_1(k_r r) + B Y_1(k_r r) \quad (2.111)$$

$$k_r^2 = - (p\pi/h)^2 + \omega^2 \mu \epsilon \quad (2.112)$$

Calculons maintenant l'énergie. En utilisant l'équation (A.27) et la condition de continuité de H_ϕ , on trouve

$$W = \frac{\nu_0}{2} \int_{\phi=0}^{2\pi} d\phi \int_{z=0}^h dz \cos^2 (p\pi z/h)$$

$$\left[\sum_{j=1}^N \int_{r=R_{j-1}}^{R_j} r dr \left(\frac{i\omega \epsilon_1}{k_r(j)} \right) \left(\frac{i\omega \epsilon_1}{k_r(j)} \right)^* Z_1(k_r(j)r) Z_1^*(k_r(j)r) \right]$$

$$= \pi h \nu_0 \Delta \sum_{j=1}^N \left(\frac{\omega \epsilon_1}{k_r(j)} \right) \left(\frac{\omega \epsilon_1}{k_r(j)} \right)^* \left[\frac{1}{(k_r(j))^2 - (k_r(j))^2} \right]$$

$$[r \{ k_r(j) Z_1(k_r(j)r) Z_0(k_r(j)r) - k_r(j)^* Z_1(k_r(j)^*r) Z_0(k_r(j)^*r) \}]$$

$$\left. \begin{aligned} & R_j \\ & - k_r(j)^* Z_1(k_r(j)r) Z_0(k_r(j)^*r) \}] \\ & R_{j-1} \end{aligned} \right]$$

$$\left\| \begin{aligned} R_0 &= 0 & \Delta &= \begin{cases} 1 & ; p = 0 \\ 1/2 & ; p \neq 0 \end{cases} \end{aligned} \right.$$

Les termes s'annulent à $r = R_N$ à cause de $Z_0(k_r(j)r)$

et $Z_0(k_r(j)^*r)$

Les termes s'annulent à $r = 0$ à cause du facteur r

$$= 2\pi h \nu_0 \Delta \sum_{j=1}^{N-1} R_j \operatorname{Re} \left[Z_1(k_r(j)^*R_j) Z_0(k_r(j)R_j) \omega \left(\frac{\omega \epsilon_1}{k_r(j)} \right)^* \right]$$

$$\left(\frac{\epsilon_1}{(k_r(j))^2 - (k_r(j))^2} - \frac{\epsilon_{j+1}}{(k_r(j+1))^2 - (k_r(j+1))^2} \right) \quad (2.113)$$

Lorsque nous écrivons $Z_0(k_r^{(j)*}r)$, par exemple, nous entendons que le conjugué complexe s'applique aussi aux coefficients A et B. Si la partie imaginaire de la permittivité efficace ϵ des matériaux est nulle,

$$\epsilon''_j = 0 \quad j = 1, 2, \dots, N$$

alors les nombres d'ondes seront réels, et les intégrales doivent être évaluées par la règle de l'Hospital (A.32). On aura:

$$\begin{aligned} W &= \pi h \mu_0 \Delta \sum_{j=1}^N \int_{R_{j-1}}^{R_j} r dr \left(\frac{\omega \epsilon_j Z_1(k_r^{(j)} r)}{k_r^{(j)}} \right)^2 \\ &= \frac{\pi h \mu_0 \Delta}{2} \sum_{j=1}^N \left(\frac{\omega \epsilon_j r}{k_r^{(j)}} \right)^2 \\ &\quad \left(Z_1^2(k_r^{(j)} r) + Z_0^2(k_r^{(j)} r) - \frac{2 Z_0(k_r^{(j)} r) Z_1(k_r^{(j)} r)}{k_r^{(j)} r} \right) \bigg|_{R_{j-1}}^{R_j} \\ &= \pi h \mu_0 \Delta \omega^2 \left[\frac{R_N^2 \epsilon_N^2 Z_{1N}^2}{2 (k_r^{(N)})^2} \right. \\ &\quad + \sum_{j=1}^{N-1} \frac{R_j^2}{2} \left[Z_{0j}^2 \left(\frac{\epsilon_j^2}{(k_r^{(j)})^2} - \frac{\epsilon_{j+1}^2}{(k_r^{(j+1)})^2} \right) \right. \\ &\quad \left. \left. - \left(\frac{2 Z_0(k_r^{(j)} R_j) Z_1(k_r^{(j)} R_j) \epsilon_j}{k_r^{(j)} R_j} \right) \left(\frac{\epsilon_j}{(k_r^{(j)})^2} - \frac{\epsilon_{j+1}}{(k_r^{(j+1)})^2} \right) \right] \right] \end{aligned} \quad (2.114)$$

Si $p=0$ les équations (2.113) et (2.114) deviennent

$$W = 2\pi h \sum_{j=1}^{N-1} R_j \operatorname{Re} \left[Z_{1jj}^* Z_{0jj} \omega (\epsilon_j^* / \nu_0)^{1/2} \left(\frac{\epsilon_j}{\epsilon_j^* \omega^{*2} - \epsilon_j \omega^2} - \frac{\epsilon_{j+1}}{\epsilon_{j+1}^* \omega^{*2} - \epsilon_{j+1} \omega^2} \right) \right] \quad (2.115)$$

et pour le cas réel:

$$W = \frac{\pi h}{2} \left(\epsilon_N R_N^2 Z_{1NN}^2 + \sum_{j=1}^{N-1} (\epsilon_j - \epsilon_{j+1}) R_j^2 Z_{0jj}^2 \right) \quad (2.116)$$

Pour des matériaux de petit rayon, c'est-à-dire

$$R_{N-1} \ll R_N \quad (2.117)$$

on obtiendra à partir des équations récurrentes approximatives (2.89) et (2.90) des facteurs d'amplitude, des approximations (A.13) et (A.16) des fonctions de Bessel et Neumann de petits arguments et de l'équation (2.91), que

$$Z_{0jj} = A^{(j)} J_{0jj} + B^{(j)} Y_{0jj} \quad j=1, 2, \dots, N-1$$

$$\approx A^{(1)} \quad (2.118)$$

$$Z_{1NN} = A^{(N)} J_{1NN} + B^{(N)} Y_{1NN}$$

$$\approx A^{(1)} J_1(x_{0m}) \quad (2.119)$$

En déterminant approximativement l'énergie emmagasinée par l'expression réelle, on obtient

$$W \approx (\pi h \Delta / 2) (A^{(1)})^2 \left[\epsilon_N R_N^2 J_1^2(x_{0m}) + \sum_{j=1}^{N-1} (\epsilon_j - \epsilon_{j+1}) R_j^2 \right] \quad (2.120)$$

2.3.3 Déviatiun de la fréquence de résonance complexe

Nous allons maintenant calculer la déviation relative de fréquence de résonance complexe qui se produit lorsqu'on introduit une substance dans la cavité idéale.

La relation entre le nombre d'ondes k_r , la fréquence de résonance ω et la permittivité efficace ϵ est donnée par l'équation suivante.

$$k_r^2 = -(p\pi/h)^2 + \omega^2 \mu \epsilon \quad (2.121)$$

La variation du nombre d'ondes k_r au carré nous donne donc l'égalité suivante:

$$\begin{aligned} \delta k_r^2 &= 2k_r \delta k_r \\ &= 2\omega \mu \epsilon \delta \omega \end{aligned} \quad (2.122)$$

En effet, lorsqu'on introduit les matériaux à l'intérieur de la cavité, " p " demeure constant. De l'équation (2.122) on obtient pour $k_r(N)$

$$\begin{aligned} \frac{\delta\omega}{\omega} &= \frac{(k_r(N))^2}{\omega^2 \mu \epsilon_N} \frac{\delta k_r(N)}{k_r(N)} \\ &= \frac{(k_r(N))^2}{\{(k_r(N))^2 + (p\pi/h)^2\}} \frac{\delta k_r(N)}{k_r(N)} \end{aligned} \quad (2.123)$$

La déviation relative du nombre d'ondes $k_r(N)$ a déjà été calculée (voir équation (2.95)). Par substitution on obtient:

$$\begin{aligned} \frac{\delta\omega}{\omega} &= \frac{(k_r(N))^2}{\{(k_r(N))^2 + (p\pi/h)^2\} 2J_1^2(x_{0m}) \epsilon_N} \sum_{j=1}^{N-1} \left(\frac{R}{R_N} \right)^2 \{\epsilon_{j+1} - \epsilon_j\} \\ &\approx \frac{x_{0m}^2}{\{x_{0m}^2 + (p\pi R_N/h)^2\} 2J_1^2(x_{0m}) \epsilon_N} \sum_{j=1}^{N-1} \left(\frac{R}{R_N} \right)^2 \{\epsilon_{j+1} - \epsilon_j\} \end{aligned} \quad (2.124)$$

Ici, on a utilisé l'approximation suivante

$$k_{rm}(N) \approx \frac{x_{0m}}{R_N} \quad (2.125)$$

En réorganisant l'équation (2.124), on obtient

$$\frac{\delta\omega}{\omega} = \frac{x_{0m}^2}{\{x_{0m}^2 + (p\pi R_N / h)^2\} 2J_1^2(x_{0m}) R_N^2} \left[R_1^2 \left(1 - \frac{\epsilon_1}{\epsilon_N} \right) + \sum_{j=1}^{N-2} (R_{j+1}^2 - R_j^2) \left(1 - \frac{\epsilon_{j+1}}{\epsilon_N} \right) \right] \quad (2.126)$$

Cette équation s'obtient aussi directement de la théorie des perturbations [8].

On remarque que chaque matériau introduit dans la cavité produit une déviation particulière de la fréquence relative, indépendamment des matériaux qui se trouvent déjà dans la cavité. C'est-à-dire

$$\frac{\delta\omega}{\omega} = \sum_{j=1}^{N-1} \frac{\delta\omega_j}{\omega} \quad (2.127)$$

où

$\delta\omega_j/\omega$ est la déviation relative de fréquence produite en introduisant le j ième matériau.

La déviation de l'inverse du facteur de qualité est donnée par l'équation (1.18). En conséquence, le facteur de qualité dû aux pertes d'énergie à l'intérieur des matériaux sera égal à l'expression suivante:

$$\delta \left(\frac{1}{Q} \right) = \frac{x_{0m}^2}{\{x_{0m}^2 + (\pi R_N/h)^2\} J_1^2(x_{0m}) R_N}$$

$$\left[R_1^2 \left(1 - \frac{\epsilon''_1}{\epsilon_N} \right) + \sum_{j=1}^{N-2} (R_{j+1}^2 - R_j^2) \left(1 - \frac{\epsilon''_{j+1}}{\epsilon_N} \right) \right] \quad (2.128)$$

où ϵ_N est égale à la permittivité du vide. Ainsi, dans cette approximation, chaque matériau apporte sa contribution particulière au facteur de qualité, indépendamment des autres matériaux qui se trouvent à l'intérieur de la cavité.

Ceci termine la théorie de la cavité idéale. Nous sommes maintenant en mesure d'aborder la cavité non idéale.

CHAPITRE III

CONDUCTIVITE DES PAROIS

3.1 Effet de la conductivité

En réalité, les parois de la cavité cylindrique n'ont pas une conductivité infinie, malgré que cette dernière soit très grande. Dans le but d'obtenir des mesures de permittivité plus précises, nous allons maintenant examiner le cas d'une cavité cylindrique ayant des parois de conductivité finie. En premier lieu, nous devons déterminer l'effet de la conductivité d'une façon générale; ensuite nous obtiendrons l'équation caractéristique (incluant la conductivité de la paroi circulaire). Finalement, nous calculerons la déviation du facteur de qualité produite par les parois des extrémités d'une cavité complètement fermée.

Nous allons observer ce qui se produit à la frontière d'un diélectrique et d'un conducteur, lorsqu'on a une composante tangentielle de champ magnétique H .

Soit H_{1x} la composante tangentielle du champ magnétique H dans le diélectrique (figure 3.1). On suppose que la distance sur laquelle H_{1x} varie substantiellement est beaucoup plus grande que la profondeur de pénétration.

Dans le conducteur, l'équation d'onde pour la composante H_{2x} nous donne

$$\text{Lap } H_{2x} = i\omega\mu_2 (\sigma_2 + i\omega\epsilon_2) H_{2x} \quad (3.1)$$

où Lap est l'opérateur Laplacien et ϵ est la permittivité ordinaire. Elle n'inclut pas les effets dus à la conductivité.

On suppose que la conductivité du conducteur est beaucoup plus grande que le produit de la fréquence et de la permittivité du conducteur. Puisqu'on suppose que la profondeur de pénétration est très petite, on doit avoir que

$$\sigma_2 \gg \omega\epsilon_2$$

$$\frac{\partial^2}{\partial z^2} H_{2x} \gg \frac{\partial^2}{\partial y^2} H_{2x} \qquad \frac{\partial^2}{\partial z^2} H_{2x} \gg \frac{\partial^2}{\partial x^2} H_{2x} \quad (3.2)$$

Par conséquent l'équation d'onde (3.1) est approximativement égale à l'équation suivante:

$$\frac{\partial^2}{\partial z^2} H_{2x} = i\omega\mu_2 \sigma_2 H_{2x} \quad (3.3)$$

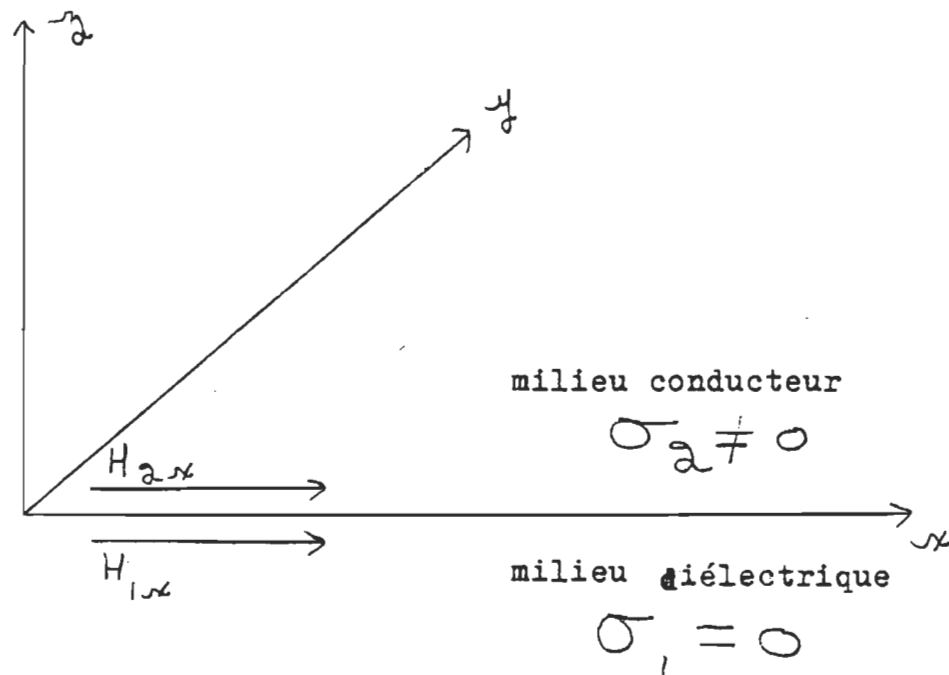


Figure 3.1 Interface conducteur diélectrique.

Ceci est une équation différentielle du deuxième ordre, dont la solution est bien connue:

$$H_{2x} = H_{2x}(z=0) \exp(-\sqrt{i\omega\mu_2 \sigma_2} z) \quad (3.4)$$

Le signe - est choisi à cause de la décroissance de H_{2x} dans le conducteur.

Du rotationnel du champ magnétique H_2 ,

$$\text{rot } H_2 = (i\omega\epsilon_2 + \sigma_2) E_2 \quad (3.5)$$

et des équations (3.2) et (3.4), on obtient facilement la relation suivante.

$$E_{2y} \approx -\left(\frac{i\omega\mu_2}{\sigma_2}\right)^{1/2} H_{2x} \quad (3.6)$$

Les relations de continuité des champs électrique E et magnétique H (équations (B.20) à (B.23)) nous donnent les équations ci-dessous:

$$H_{1x}(z=0) = H_{2x}(z=0) \quad (3.7)$$

$$E_{1y}(z=0) = -\left(\frac{i\omega\mu_2}{\sigma_2}\right)^{1/2} H_{1x}(z=0) \quad (3.8)$$

La perte ohmique dans le conducteur est donnée par la partie réelle de la composante normale du vecteur de Poynting.

$$\begin{aligned}
\frac{\text{Puissance dissipée}}{\text{unité de surface}} &= \frac{1}{2} \operatorname{Re}(\mathbf{E} \times \mathbf{H}^*) \\
&= \frac{1}{2} \operatorname{Re}(-E_Y H_X^*) \\
&= \frac{1}{2} \left(\frac{\omega' \mu}{2\sigma_2} \right)^{1/2} \mathbf{H} \cdot \mathbf{H}^* \quad (3.9)
\end{aligned}$$

Donc, si on a un champ magnétique tangentiel à l'interface conducteur diélectrique, on doit aussi avoir un champ électrique tangentiel E_Y donné par l'équation (3.8), ainsi que des pertes ohmiques données par l'équation (3.9).

3.2 Paroi circulaire

Nous allons maintenant donner l'effet de la conductivité de la paroi circulaire de la cavité cylindrique fermée. Pour les modes de vibration, on prend encore un mode TM_{0mp} , c'est-à-dire d'indice $n=0$, d'où il s'ensuit que les champs électromagnétiques à l'intérieur de la cavité (équations (2.99) à (2.103)) sont donnés par les expressions ci-dessous:

$$E_Z = [A J_0(K_R r) + B Y_0(K_R r)] \cos(p\pi z/h) \quad (3.10)$$

$$E_R = -\frac{p\pi}{hK_R} [A J_1(K_R r) + B Y_1(K_R r)] \sin(p\pi z/h) \quad (3.11)$$

$$H_\phi = -\frac{(\sigma + i\omega\epsilon)}{K_R} [A J_1(K_R r) + B Y_1(K_R r)] \cos(p\pi z/h) \quad (3.12)$$

où

$$k_r^2 + (p\pi/h)^2 = \omega^2 \mu \epsilon \quad (3.13)$$

Dans le cas de la cavité idéale, la condition de parfait conducteur à la surface de la paroi circulaire exigeait que le champ électrique E_z soit nul sur cette surface.

$$E_z(r=R_N) = 0 \quad (3.14)$$

ou

$$A^{(N)} J_{0NN} + B^{(N)} Y_{0NN} = 0 \quad (3.15)$$

Rappelons que

$$J_{ijm} = J_i(k_r^{(j)} R_m) \quad (3.16)$$

$$Y_{ijm} = Y_i(k_r^{(j)} R_m) \quad (3.17)$$

A la surface d'un conducteur de conductivité assez élevée, nous avons établi qu'il existe un champ électrique tangentiel (voir équation (3.8)). Par conséquent, la condition de parfait conducteur sera remplacée par la condition suivante:

$$E_z(r=R_N) = - \left(\frac{i\omega' \mu}{\sigma_c} \right)^{1/2} H_\phi(r=R_N) \quad (3.18)$$

Nous obtenons ainsi

$$\begin{aligned}
A^{(N)} \left[J_{ONN} - \frac{i\omega\epsilon_N}{k_r^{(N)}} \left(\frac{i\omega'\mu_c}{\sigma_c} \right)^{1/2} J_{1NN} \right] \\
+ B^{(N)} \left[Y_{ONN} - \frac{i\omega\epsilon_N}{k_r^{(N)}} \left(\frac{i\omega'\mu_c}{\sigma_c} \right)^{1/2} Y_{1NN} \right] = 0 \quad (3.19)
\end{aligned}$$

où "c" réfère à la région conductrice.

Les équations de continuité à $r=R_1, R_2, \dots, R_{N-1}$ sont les mêmes que dans le cas de la cavité idéale (équations (2.69) et (2.70)). Par conséquent, on obtient la même équation caractéristique que pour la cavité idéale, équation (2.80), à cette différence près que J_{ONN} et Y_{ONN} deviennent

$$J_{ONN} \longrightarrow \left(J_{ONN} - \frac{i\omega\epsilon_N}{k_r^{(N)}} \left(\frac{i\omega'\mu_c}{\sigma_c} \right)^{1/2} J_{1NN} \right) \quad (3.20)$$

$$Y_{ONN} \longrightarrow \left(Y_{ONN} - \frac{i\omega\epsilon_N}{k_r^{(N)}} \left(\frac{i\omega'\mu_c}{\sigma_c} \right)^{1/2} Y_{1NN} \right) \quad (3.21)$$

Ainsi, nous venons de trouver une relation exacte entre la permittivité efficace ϵ de l'échantillon et la fréquence de résonance complexe ω d'une cavité conductrice fermée ayant des bouts parfaitement conducteurs.

Si le rayon des matériaux est beaucoup plus petit que celui de la cavité, alors le nombre d'ondes $k_r^{(N)}$ de la N ième région est approximativement égale au m ième zéro de la

fonction de Bessel d'ordre zéro (équation (2.91)).

$$k_r^{(N)} R_N = x_{0m} + R_N \delta k_r^{(N)} \approx x_{0m} \quad (3.22)$$

En effectuant un développement de Taylor de l'équation (3.19), autour de x_{0m} , on obtient

$$\frac{\delta k_r^{(N)}}{k_r^{(N)}} \approx \frac{(-B^{(N)} / A^{(N)}) Y_0(x_{0m}) + (i\omega\epsilon_N / k_r^{(N)}) (i\omega'\mu_c / \sigma_c)^{1/2} J_{1NN}}{-x_{0m} [J_1(x_{0m}) + (B^{(N)} / A^{(N)}) Y_1(x_{0m})]}$$

Le premier terme du numérateur représente la contribution des échantillons (voir l'équation (2.95)). La déviation relative du nombre d'ondes $k_r^{(N)}$, causée par la conductivité de la paroi circulaire, est donc

$$\begin{aligned} \frac{\delta k_r^{(N)}}{k_r^{(N)}} &= - \frac{i\omega\epsilon_N}{k_r^{(N)} x_{0m}} \left(\frac{i\omega'\mu_c}{\sigma_c} \right)^{1/2} \left[1 + \frac{B^{(N)} Y_1(x_{0m})}{A^{(N)} J_1(x_{0m})} \right]^{-1} \\ &\approx \frac{i\omega\epsilon_N}{(k_r^{(N)})^2 R_N} \left(\frac{i\omega'\mu_c}{\sigma_c} \right)^{1/2} \\ &\quad \left[1 + \frac{Y_1(x_{0m}) \pi x_{0m}^2}{4 J_1(x_{0m}) \epsilon_N} \sum_{j=1}^{N-1} \left(\frac{R_j}{R_N} \right)^2 \{ \epsilon_{j+1} - \epsilon_j \} \right]^{-1} \end{aligned} \quad (3.24)$$

où on a utilisé les relations de récurrence approximative

(2.89), (2.90)) des facteurs d'amplitude A et B.

Si le nombre d'ondes k_z est égal à zéro, alors l'équation (3.24) nous donne la déviation de fréquence due à la conductivité de la paroi circulaire:

$$\left(\frac{\delta\omega}{\omega} \right)_{\text{circulaire}} = \frac{(-1+i)}{R_N (2\omega' \mu \sigma_C)^{1/2}}$$

$$\left[1 + \frac{Y(x_{Om}) \pi x_{Om}^2}{4 J_1(x_{Om}) \epsilon_N} \sum_{j=1}^{N-1} \left(\frac{R}{R_N} \right)^2 \{\epsilon_{j+1} - \epsilon_j\} \right]^{-1} \quad (3.25)$$

La déviation du facteur de qualité (équation (1.18)), due à la conductivité de la paroi circulaire, est donc:

$$\delta \left(\frac{1}{Q} \right)_{\text{circulaire}} = \text{Im} \left(\frac{2\delta\omega}{\omega} \right)_{\text{circulaire}}$$

$$= \frac{2}{R_N (2\omega' \mu \sigma_C)^{1/2}} \left[1 + \frac{Y(x_{Om}) \pi x_{Om}^2}{4 J_1(x_{Om}) \epsilon_N} \sum_{j=1}^{N-1} \left(\frac{R}{R_N} \right)^2 \{\epsilon_{j+1} - \epsilon_j\} \right]^{-1}$$

$$\approx \frac{2}{R_N (2\omega' \mu_0 \sigma_C)^{1/2}} \quad (3.26)$$

Les deux dernières équations ont été dérivées dans le but de donner un aperçu explicite des effets de la conductivité de la paroi circulaire.

3.3 Parois du haut et du bas

Pour la conductivité des parois inférieure et supérieure, nous ne calculerons que la déviation de l'inverse du facteur de qualité produite par ces parois.

La contribution additionnelle au facteur de qualité due à la conductivité finie des parois du haut et du bas est donnée par

$$\delta \left(\frac{1}{Q} \right) = \frac{P_{\text{ohm add.}}}{\omega' W} \quad (3.27)$$

La puissance dissipée dans les parois est donnée par l'équation (3.9), et l'énergie emmagasinée dans la cavité par l'équation (2.108). Par substitution dans l'équation (3.27), on obtient:

$$\delta \left(\frac{1}{Q} \right) = \left(\frac{1}{2\omega' \mu \sigma_c} \right)^{1/2} \frac{\int_{\text{bouts}} dS \mathbf{H} \cdot \mathbf{H}^*}{\int_{\text{cavité}} dv \mathbf{H} \cdot \mathbf{H}^*} \quad (3.28)$$

Puisque le champ magnétique H_0 est donné par

$$H_\phi = -(i\omega\epsilon / K_r) [A J_1(K_r r) + B Y_1(K_r r)] \cos(p\pi z/h) \quad (3.29)$$

on aura l'égalité suivante.

$$\begin{aligned}
 \int_V dv \mathbf{H} \cdot \mathbf{H}^* &= \int_S dS \int_0^h dz \mathbf{H} \cdot \mathbf{H}^* \\
 &= h\Delta \int_S dS \mathbf{H}(z=0, h) \cdot \mathbf{H}^*(z=0, h)
 \end{aligned} \tag{3.30}$$

où

$$\Delta = \begin{cases} 1 & ; p=0 \\ 1/2 & ; p \neq 0 \end{cases} \tag{3.31}$$

Des équations (3.28) et (3.30), on obtient l'expression pour la déviation de l'inverse du facteur de qualité produit par la conductivité des parois du haut et du bas.

$$\delta \left(\frac{1}{Q} \right) = \frac{2}{(2\omega' \mu_0 \sigma_c)^{1/2} h\Delta} \tag{3.32}$$

En corrigeant le facteur de qualité à l'aide de cette équation, on peut utiliser l'équation caractéristique qui inclut la conductivité de la paroi circulaire, et ainsi obtenir une mesure précise de la permittivité à partir d'une cavité cylindrique ayant des parois de conductivité finie.

CHAPITRE IV

TROUS D'INSERTION

4.1 Introduction

La cavité cylindrique, utilisée pour effectuer les mesures de permittivité, possède un tube d'insertion conducteur (c'est à dire les deux ouvertures cylindrique d'insertion) (figure 4.1): celui-ci permet d'introduire directement l'échantillon dans la cavité, sans qu'il soit nécessaire de la désassembler à chaque fois. De plus, le tube fournit un alignement à l'échantillon.

Avec une telle cavité, la détermination de la relation théorique entre la permittivité efficace ϵ et la fréquence de résonance complexe ω , est une tâche plutôt complexe. Or, si l'on veut mesurer la permittivité d'un échantillon au moyen de la méthode de résonance mentionnée dans le premier chapitre, cette relation théorique de l'équation caractéristique doit être connue. Habituellement, on simplifie le problème en supposant qu'on a utilisé une cavité idéale. Evidemment, en procédant de cette façon, on introduit une erreur théorique sur la mesure de la

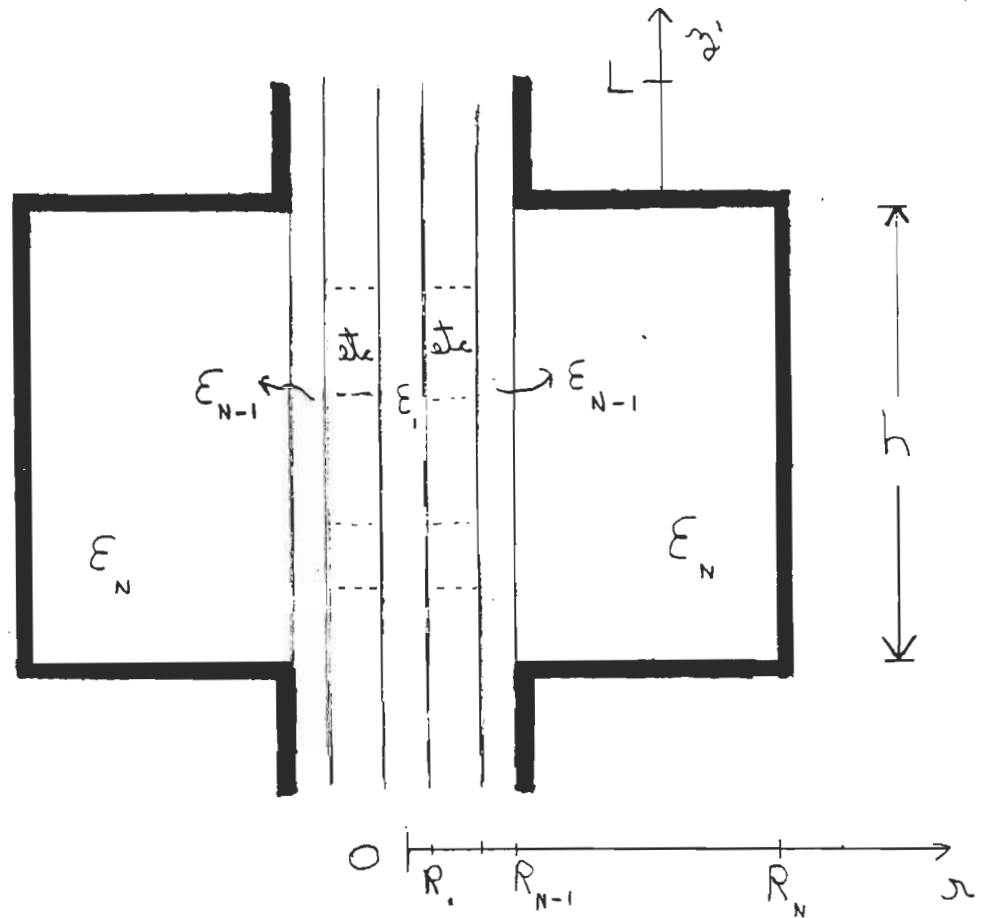


Figure 4.1 Cavité cylindrique non idéale contenant $N-1$ matériaux isotropes, linéaires et homogènes.

permittivité, indépendamment de l'appareillage utilisé. Bien que nous soyons conscient de cette erreur, il n'en demeure pas moins que d'un point de vue mathématique, c'est la façon la plus simple de procéder.

Dans les conditions non idéales, les principales erreurs théoriques sur la mesure de la permittivité, se produisent lorsqu'on néglige les effets du tube d'insertion conducteur. Ces effets sont appelés " effets de bouts".

Le but du présent chapitre est de donner la déviation relative de fréquence de résonance complexe de la cavité possédant un tube d'insertion parfaitement conducteur par rapport à la cavité idéale. Nous pourrions alors utiliser l'équation caractéristique de la cavité idéale, que nous connaissons déjà. Nous obtiendrons ainsi des mesures précises de permittivité.

Si la cavité possède un tube d'insertion conducteur, le facteur de qualité doit diminuer, car la partie de l'échantillon qui se trouve dans le tube d'insertion conducteur produira des pertes supplémentaires. En ce qui concerne la fréquence de résonance, on note simplement que la fréquence de coupure du tube d'insertion conducteur est supérieure à la fréquence de résonance de la cavité idéale. D'après les expérimentations, la fréquence de résonance f et

le facteur de qualité Q de la cavité munie d'un tube d'insertion conducteur sont respectivement supérieure et inférieure à ceux de la cavité idéale.

$$f > f_{\text{idéale}} \quad (4.1)$$

$$Q < Q_{\text{idéale}} \quad (4.2)$$

Conséquemment, la valeur mesurée de ξ' , si on utilise les formules de la cavité idéale, est trop petite, et celle de ξ'' est trop grande.

Pour la partie quantitative, nous trouverons premièrement la distribution des champs électromagnétiques à l'intérieur du tube d'insertion conducteur. Puis, nous calculerons la déviation relative de fréquence de résonance complexe par rapport à la cavité fermée: nous pourrons ensuite utiliser l'équation caractéristique de la cavité fermée et ainsi en arriver à une détermination précise de la permittivité.

Finalement, dans le but de comparer avec les ouvrages spécialisés, nous chercherons à obtenir l'erreur relative sur la mesure de la permittivité due au tube d'insertion conducteur, calculée en utilisant l'équation caractéristique découlant directement de la théorie des perturbations (équation 2.126), pour la cavité fermée.

4.2 Distribution des champs électromagnétiques

4.2.1 Expressions générales des champs

Soit une cavité cylindrique parfaitement conductrice, possédant un tube d'insertion de longueur L de même matériel. Ce tube est rempli par un ou plusieurs matériaux (figure 4.1). La $N^{\text{ième}}$ substance est de l'air, d'où $\sigma_N = 0$ et $\epsilon_N = \epsilon_0$ (permittivité du vide).

Les mesures du facteur de qualité Q et de la fréquence de résonance f s'effectuent plus facilement lorsque le facteur de qualité est élevé. Les courbes de phase et d'amplitude sont ainsi plus prononcées (voir section 1.2.1). C'est pourquoi on utilise habituellement un tube d'insertion conducteur de petit rayon, de façon à réduire les pertes diélectriques et ainsi augmenter le facteur de qualité.

On considère le cas où le rayon du tube d'insertion conducteur est beaucoup plus petit que celui de la cavité,

$$R_{N-1} \ll R_N \quad (4.3)$$

A l'intérieur, l'atténuation des champs électromagnétiques sera donc très rapide, car la fréquence de coupure du tube sera très supérieure à celle de la fréquence de résonance de la cavité (figure 4.2).

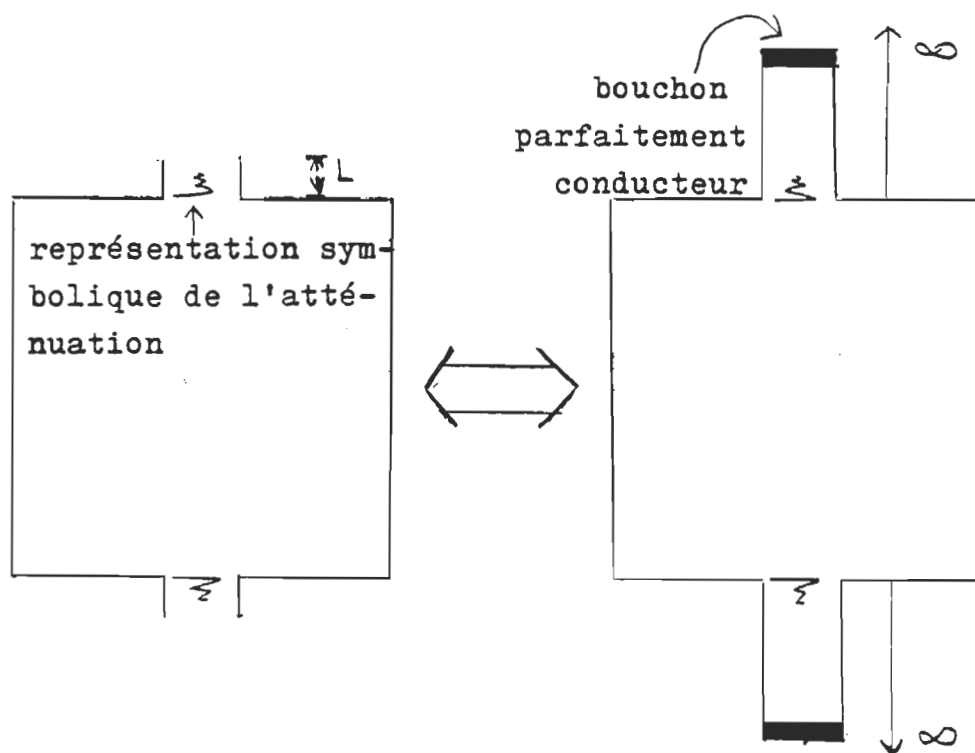


Figure 4.2 Atténuation à l'intérieur du tube d'insertion conducteur, ouvert et fermé.

La cavité initiale (figure 4.1) est donc équivalente à une cavité cylindrique possédant un tube d'insertion conducteur infiniment long, aux extrémités duquel se trouvent des bouchons parfaitement conducteurs (figure 4.2). Les parties que nous venons de rajouter au tube d'insertion conducteur n'ont à toutes fins pratiques aucun effet sur les champs électromagnétiques, puisque ceux-ci sont très atténués lorsqu'ils atteignent les régions correspondantes.

Considérons maintenant le cas où la position η des bouchons parfaitement conducteurs est variable (figure 4.3). Dans la cavité, on excite un mode de vibration TM_{0mp} , un mode à symétrie circulaire. Puisque le tube d'insertion conducteur est alimenté par la cavité, les champs électromagnétiques à l'intérieur de celui-ci doivent aussi être à symétrie circulaire. On aura donc une combinaison de mode TM_{0u} , où u est l'indice radial indiquant le nombre de noeuds suivant la coordonnée r (diamètre). La solution générale à l'intérieur du tube d'insertion conducteur sera (voir équations (2.49)-(2.54)):

$$E_z = \sum_{u=1}^{\infty} [A_{0u}^{\eta} J_0(\kappa_{0u} r) + B_{0u}^{\eta} Y_0(\kappa_{0u} r)] \quad [\exp(i\kappa_{z0u} z) + d_{0u}^{\eta} \exp(-i\kappa_{z0u} z)] \quad (4.4)$$

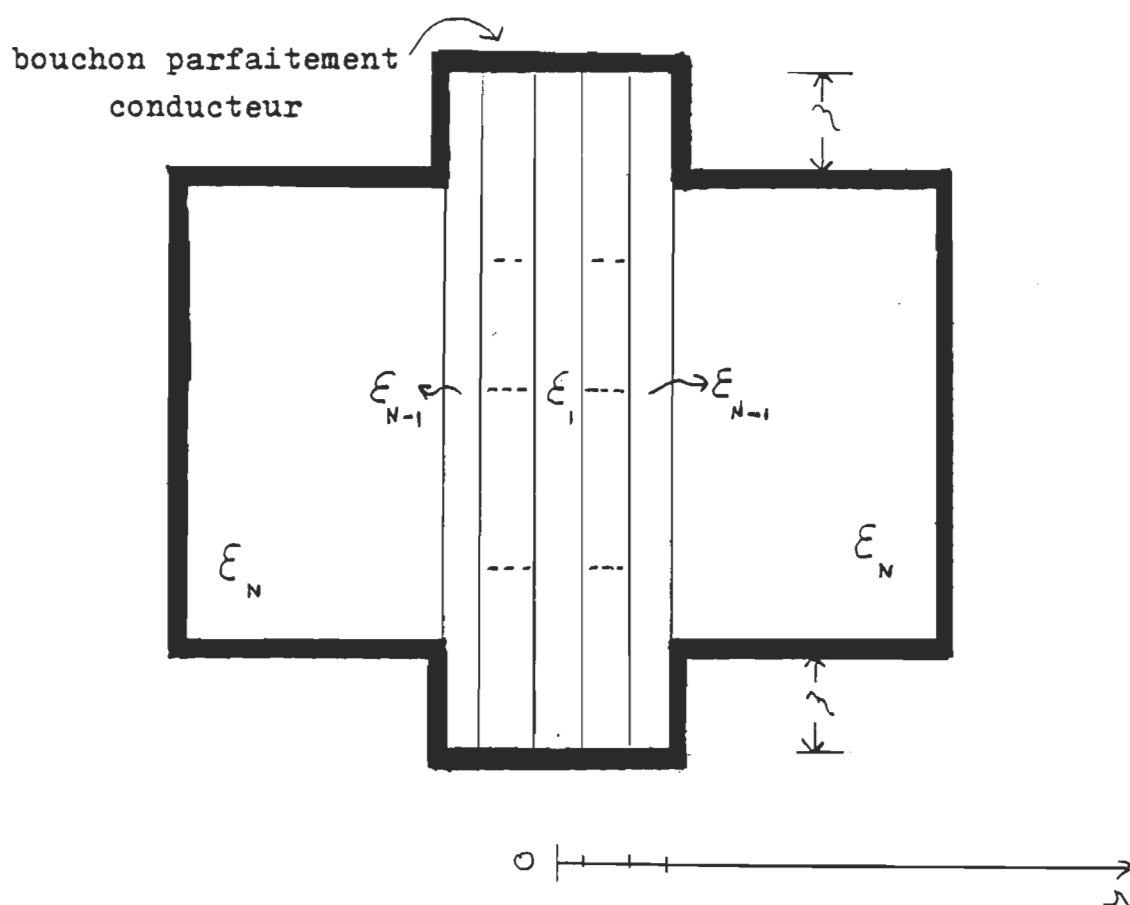


Figure 4.3 Cavité cylindrique non idéale complètement fermée.

$$E_r = \sum_{u=1}^{\infty} -i \frac{\kappa_{zOu}}{\kappa_{rOu}} [R_{Ou}^{\eta} J_1(\kappa_{rOu} r) + B_{Ou}^{\eta} Y_1(\kappa_{rOu} r)]$$

$$[\exp(i\kappa_{zOu} z) - d_{Ou}^{\eta} \exp(-i\kappa_{zOu} z)] \quad (4.5)$$

$$H_{\phi} = \sum_{u=1}^{\infty} \frac{i\omega\epsilon}{\kappa_{rOu}} [R_{Ou}^{\eta} J_1(\kappa_{rOu} r) + B_{Ou}^{\eta} Y_1(\kappa_{rOu} r)]$$

$$[\exp(i\kappa_{zOu} z) + d_{Ou}^{\eta} \exp(-i\kappa_{zOu} z)] \quad (4.6)$$

où

$$\kappa_{rOu}^2 + \kappa_{zOu}^2 = \omega^2 \mu\epsilon \quad (4.7)$$

$$\kappa_{zOu}^{(j)} = \kappa_{zOu}^{(j+1)} \quad j = 1, \dots, N-2 \quad (4.8)$$

Ici, les indices (j) et (j+1) réfèrent aux matériaux correspondants. Les constantes R_{Ou}^{η} et B_{Ou}^{η} , pour le moment arbitraires, varient d'un matériau à l'autre.

Implicitement,

$$R_{Ou}^{\eta} = \begin{cases} R_{Ou}^{(1)\eta} & ; 0 \leq r \leq R_1 \\ R_{Ou}^{(2)\eta} & ; R_1 \leq r \leq R_2 \\ \vdots & \vdots \\ R_{Ou}^{(N-1)\eta} & ; R_{N-2} \leq r \leq R_{N-1} \end{cases} \quad (4.9)$$

$$\sigma = \begin{cases} \sigma_1 & ; 0 \leq r \leq R_1 \\ \sigma_2 & ; R_1 \leq r \leq R_2 \\ \vdots & \vdots \\ \sigma_{N-1} & ; R_{N-2} \leq r \leq R_{N-1} \end{cases} \quad (4.10)$$

et de même pour B_{0u} , d_{0u} , k_{r0u} , k_{z0u} et ϵ respectivement.

Pour la cavité elle-même, elle est pratiquement remplie par la N_i ème substance, et on a

$$k_{rm}^{(N)} \approx \frac{x_{0m}}{R_N} \quad (4.11)$$

où $k_{rm}^{(N)}$ est le nombre d'ondes dans la cavité, pour $r > R_{N-1}$. On a donc

$$(k_{rm}^{(N)})^2 + (p\pi/h)^2 = \omega^2 \mu \epsilon_N \quad (4.12)$$

Il faut maintenant faire une approximation importante. Nous supposons d'abord que les indices m et p du mode TM_{0mp} ne sont pas trop grands. Puisque le rayon du tube d'insertion conducteur R_{N-1} est beaucoup plus petit que les dimensions linéaires du corps principal de la cavité (R_N et h), alors $\omega^2 \mu \epsilon_N$, donné dans l'équation (4.12), est de l'ordre de R_N^{-2} (ou h^{-2}). Le k_{r0u}^2 est de l'ordre R_{N-1}^{-2} , d'où, en utilisant (4.7), nous obtenons

$$k_{z0u}^2 = -k_{r0u}^2 \left[1 + \text{Ord} \left(\frac{\epsilon_1^2}{\epsilon_0 R_N^2} \right) \right] \quad (4.13)$$

Nous ferons l'approximation suivante:

$$k_{z0u} = +ik_{r0u} \quad (4.14)$$

pour tout u .

De équations (4.8) et (4.14), on obtient

$$\kappa_{rou}^{(j)} = \kappa_{rou}^{(j+1)} \quad j = 1, 2, \dots, N-2 \quad (4.15)$$

Il est intéressant de noter qu'à l'intérieur du tube d'insertion conducteur, les nombres d'ondes $\kappa_{rou}^{(j)}$ et $\kappa_{zou}^{(j)}$ sont les mêmes dans les différents matériaux indépendamment de la conductivité et de la permittivité de ceux-ci. Les expressions pour les champs à l'intérieur du tube se simplifient à

$$E_z \approx \sum_{u=1}^{\infty} [R_{ou}^{\eta} J_0(\kappa_{ou}r) + B_{ou}^{\eta} Y_0(\kappa_{ou}r)] \\ [\exp(-\kappa_{ou}z) + d_{ou}^{\eta} \exp(\kappa_{ou}z)] \quad (4.16)$$

$$E_r \approx \sum_{u=1}^{\infty} [R_{ou}^{\eta} J_1(\kappa_{ou}r) + B_{ou}^{\eta} Y_1(\kappa_{ou}r)] \\ [\exp(-\kappa_{ou}z) - d_{ou}^{\eta} \exp(\kappa_{ou}z)] \quad (4.17)$$

$$H_{\phi} \approx \sum_{u=1}^{\infty} \frac{i\omega\epsilon}{\kappa_{ou}} [R_{ou}^{\eta} J_1(\kappa_{ou}r) + B_{ou}^{\eta} Y_1(\kappa_{ou}r)] \\ [\exp(-\kappa_{ou}z) + d_{ou}^{\eta} \exp(\kappa_{ou}z)] \quad (4.18)$$

où $\kappa_{ou} = \kappa_{rou} = |\kappa_{zou}|$. On a omis l'indice r simplement pour alléger l'écriture. κ_{ou} est le même pour tout les matériaux. Noter que $B_{ou}^{(1)} = 0$, car les champs ne sont pas infinis à $r=0$.

En utilisant les équations de récurrence (2.72) et (2.73), qui donnaient les relations entre les facteurs d'amplitude de deux régions diélectriques adjacentes, nous obtenons

$$R_{Ou}^{(j+1)\eta} \approx R_{Ou}^{(j)\eta} \left(1 + \frac{\pi \kappa_{Ou} R}{2 \epsilon_{j+1}} \{Y_{Ou} J_{1u} (\epsilon_j - \epsilon_{j+1})\} \right) + B_{Ou}^{(j)\eta} \left(\frac{\pi \kappa_{Ou} R}{2 \epsilon_{j+1}} \{Y_{Ou} Y_{1u} (\epsilon_j - \epsilon_{j+1})\} \right) \quad (4.19)$$

$$B_{Ou}^{(j+1)\eta} \approx B_{Ou}^{(j)\eta} \left(1 - \frac{\pi \kappa_{Ou} R}{2 \epsilon_{j+1}} \{J_{Ou} Y_{1u} (\epsilon_j - \epsilon_{j+1})\} \right) - R_{Ou}^{(j)\eta} \left(\frac{\pi \kappa_{Ou} R}{2 \epsilon_{j+1}} \{J_{Ou} J_{1u} (\epsilon_j - \epsilon_{j+1})\} \right) \quad (4.20)$$

où

$$J_{1u} = J_1(\kappa_{Ou} R_j) \quad (4.21)$$

$$Y_{1u} = Y_1(\kappa_{Ou} R_j) \quad (4.22)$$

Les facteurs d'amplitude de la deuxième région seront donc donnés par les équations suivantes.

$$R_{Ou}^{(2)\eta} = R_{Ou}^{(1)\eta} \left(1 + \frac{\pi \kappa_{Ou} R}{2 \epsilon_2} \{Y_{Ou1} J_{1u1} (\epsilon_1 - \epsilon_2)\} \right) \quad (4.23)$$

$$B_{Ou}^{(2)} \eta = - R_{Ou}^{(1)} \eta \left(\frac{\pi \kappa_{Ou} R}{2 \epsilon_2} \{ J_{Ou1} J_{1u1} (\epsilon_1 - \epsilon_2) \} \right) \quad (4.24)$$

Considérons le cas où l'on a deux matériaux à l'intérieur du tube d'insertion parfaitement conducteur. La condition de parfait conducteur à $r=R_{N-1}$, pour le tube d'insertion

$$R_{Ou}^{(N-1)} \eta J_{Ou, N-1} + B_{Ou}^{(N-1)} \eta Y_{Ou, N-1} = 0 \quad (4.25)$$

nous donne l'égalité suivante:

$$J_{Ou2} + \frac{\pi \kappa_{Ou} R_1}{2 \epsilon_2} J_{1u1} (\epsilon_1 - \epsilon_2) \{ Y_{Ou1} J_{Ou2} - J_{Ou1} Y_{Ou2} \} = 0 \quad (4.26)$$

En utilisant l'identité (A.17), on obtient l'équation caractéristique suivante:

$$\frac{\epsilon_1}{\epsilon_2} = \frac{J_{Ou1} \{ J_{Ou2} Y_{1u1} - Y_{Ou2} J_{1u1} \}}{J_{1u1} \{ J_{Ou2} Y_{Ou1} - Y_{Ou2} J_{Ou1} \}} \quad (4.27)$$

Des équations (2.84) et (2.85) relatives à l'équation caractéristique du tube d'insertion parfaitement conducteur, on conclut que si trois diélectriques se trouvent à l'intérieur du tube d'insertion conducteur, alors l'équation caractéristique reste la même, sauf que les fonctions de Bessel J_{Ou2} et de Neumann Y_{Ou2} deviennent $J_{Ou2} \rightarrow J_{Ou2} [Y_{Ou3} J_{1u2} - J_{Ou3} Y_{1u2}]$

$$+ \epsilon_2 J_{1u2} [Y_{Ou2} J_{Ou3} - Y_{Ou3} J_{Ou2}] \quad (4.28a)$$

$$\begin{aligned}
 \gamma_{Ou2} \text{ ----} > \gamma_{Ou2} [\gamma_{Ou3} J_{1u2} - J_{Ou3} \gamma_{1u2}] \\
 + \epsilon_2 \gamma_{1u2} [J_{Ou3} \gamma_{Ou2} - \gamma_{Ou3} J_{Ou2}] \quad (4.28b)
 \end{aligned}$$

Pour quatre matériaux, c'est J_{Ou3} et γ_{Ou3} qui vont changer de façon similaire, et ainsi de suite.

4.2.2 Détermination des κ_{Ou}

Les champs à l'intérieur du tube d'insertion conducteur seront complètement spécifiés lorsque les $R_{Ou}^{(1)}$, d_{Ou} , κ_{Ou} seront connus.

Dans l'équation caractéristique (4.27), les seules inconnues sont la permittivité efficace ϵ_1 (on suppose ϵ_2 connue) et les nombres d'ondes κ_{Ou} , où on a déjà défini la permittivité efficace comme suit:

$$\epsilon \equiv \epsilon - i(\sigma/\omega) \quad (4.29)$$

où σ est la conductivité et ϵ est la permittivité.

Connaissant la fréquence de résonance complexe du système, on peut calculer à partir de l'équation caractéristique (2.80) de la cavité idéale, la valeur approximative de la permittivité efficace ϵ_1 . Ensuite, en utilisant l'équation (4.27), nous allons trouver le spectre

discret des κ_{0u} .

Remarque: Les équations (4.27) et (2.80) sont des équations transcendantes, c'est-à-dire qu'elles ne possèdent pas de solutions sous forme explicite. Pour les résoudre, nous avons utilisé l'ordinateur: c'est ce qui fera l'objet du chapitre cinq.

4.2.3 Détermination des d_{0u}^{η}

La cavité considérée possède des bouchons parfaitement conducteurs situés à $z=\eta$ (figure 4.3); la composante tangentielle du champ électrique est nulle sur ces surfaces.

$$E_T(z=\eta) = 0 \quad (4.30)$$

Par conséquent, des équations (4.17) et (4.30), on obtient

$$\exp(-\kappa_{0u} \eta) - d_{0u}^{\eta} \exp(\kappa_{0u} \eta) = 0 \quad (4.31)$$

c'est-à-dire que les coefficients d_{0u}^{η} seront égaux à l'exponentielle suivante:

$$d_{0u}^{\eta} = \exp(-2\kappa_{0u} \eta) \quad (4.32)$$

4.2.4 Détermination des $R_{0u}^{(1)\eta}$

Posons

$$P_{vu}(r) = \begin{cases} P_{vu}^{(1)}(r) & 0 \leq r \leq R_1 \\ P_{vu}^{(2)}(r) & R_1 \leq r \leq R_2 \\ \vdots & \vdots \\ P_{vu}^{(N-1)}(r) & R_{N-2} \leq r \leq R_{N-1} \end{cases} \quad (4.33)$$

et

$$P_{vu}^{jn} = P_{vu}^{(j)}(R_n) \quad (4.34)$$

où

$$P_{vu}^{(j)} = \frac{1}{R_{Ou}^{(1)}\eta} [R_{Ou}^{(j)}\eta J_V(\kappa_{Ou}r) + B_{Ou}^{(j)}\eta Y_V(\kappa_{Ou}r)] \quad (4.35)$$

Les expressions pour les champs à l'intérieur du tube d'insertion conducteur deviennent alors

$$E_z = \sum_{u=1}^{\infty} R_{Ou}^{(1)}\eta P_{Ou}(r) [\exp(-\kappa_{Ou} z) + \exp(\kappa_{Ou} \{-2\eta + z\})] \quad (4.36)$$

$$E_r = \sum_{u=1}^{\infty} R_{Ou}^{(1)}\eta P_{1u}(r) [\exp(-\kappa_{Ou} z) - \exp(\kappa_{Ou} \{-2\eta + z\})] \quad (4.37)$$

$$H_{\phi} = \sum_{u=1}^{\infty} \left(\frac{i\omega\epsilon}{\kappa_{Ou}} \right) R_{Ou}^{(1)}\eta P_{1u}(r) [\exp(-\kappa_{Ou} z) + \exp(\kappa_{Ou} \{-2\eta + z\})] \quad (4.38)$$

De la continuité des champs (annexe B) à $r = R_j$, pour "j"

allant de un à N-2, on doit avoir

$$P_{Ou,jj} = P_{Ou,j+1,j} \quad (4.39)$$

$$\epsilon_j P_{1u,jj} = \epsilon_{j+1} P_{1u,j+1,j} \quad (4.40)$$

Par conséquent, les P_{Ou} satisfont des relations identiques aux P_{Ou} de l'annexe A (équation (A.46)); c'est pourquoi ces différents P_{Ou} sont des fonctions orthogonales sur l'intervalle $(0, R_{N-1})$, par rapport au poids $r\epsilon$, c'est-à-dire

$$\int_0^{R_{N-1}} r dr \epsilon P_{Ou}(r) P_{Ov}(r) = 0 \quad \text{si } u \neq v \quad (4.41)$$

Afin de déterminer les facteurs d'amplitude $R_{Ou}^{(1)}$, nous allons raccorder à l'interface tube-cavité les expressions mathématiques pour les champs électromagnétiques.

Dans la cavité se trouvent le mode principal TM_{Omp} et les modes secondaires TM_{Ouq} . Le mode principal est excité par l'antenne située sur la paroi circulaire, et les modes secondaires sont générés à l'interface tube-cavité par la discontinuité qui s'y trouve. Les modes secondaires sont requis pour satisfaire les restrictions imposées par l'interface tube-cavité. De plus, ils sont atténués, car la fréquence de vibration est inférieure à la fréquence de coupure de ces modes.

Chaque mode vibrant dans la cavité apporte sa contribution particulière aux champs électromagnétiques qui sont à l'intérieur du tube d'insertion conducteur. L'intensité des modes secondaires est d'autant plus petite que le rayon du tube est petit; ainsi on se rapproche davantage du cas de la cavité idéale où se trouve seulement le mode principal.

Le rayon du tube d'insertion conducteur étant beaucoup plus petit que celui de la cavité, $R_{N-1} \ll R_N$, nous allons négliger les modes secondaires de la cavité ainsi que leurs contributions respectives dans le tube. A l'intérieur de la cavité, le champ E_z cavité (équation 2.99) du mode principal TM_{0mp} est donné par

$$E_z \text{ cavité} = [A_{0m} J_0(k_{r0m}r) + B_{0m} Y_0(k_{r0m}r)] \cos(p\pi z/h) \quad (4.42)$$

où k_{r0m} est de l'ordre de (x_{0m}/R_N) .

On pose que le facteur d'amplitude du centre de la cavité est égal à un. Ce choix arbitraire ne change en rien nos résultats finaux, puisque dans ceux-ci ce facteur d'amplitude s'élimine. Nous l'avons posé égal à un tout simplement pour ne pas trainer cette variable qui pourrait rendre la compréhension de la notation utilisée plus difficile.

$$A_{Om}^{(1)} = 1 \quad (4.43a)$$

En effectuant les approximations habituelles, pour le cas où le rayon du tube d'insertion conducteur est beaucoup plus petit que celui de la cavité, $R_{N-1} \ll R_N$, en utilisant les relations de récurrences des facteurs d'amplitude (2.89) (2.90) avec les approximations des fonctions de Bessel (A.13) (A.14), nous obtenons le résultat suivant: aux interfaces tube-cavité,

$$E_z \text{ cavité } (r \leq R_{N-1}) \approx 1 \quad (4.43b)$$

A l'intérieur du tube d'insertion conducteur, le champ électrique E_z est donné par l'équation (4.36). De la continuité du champ électrique E_z aux interfaces, on aura donc

$$\sum_{u=1}^{\infty} R_{Ou}^{(1)\eta} [1 + \exp(-2\kappa_{Ou}\eta)] P_{Ou}(r) \approx 1 \quad (4.44)$$

où $r \leq R_{N-1}$.

Multiplions cette équation par $\epsilon P_{Ov}(r) r dr$, et intégrons de $r=0$ à $r=R_{N-1}$, comme dans l'annexe A (équation (A.52)). On obtient

$$R_{Ou}^{(1)\eta} = \frac{\epsilon_{N-1} R_{N-1} P_{1u, N-1, N-1}}{\kappa_{Ou} [1 + \exp(-2\kappa_{Ou}\eta)]} \left[\frac{R_{N-1}^2 \epsilon_{N-1} P_{1u, N-1, N-1}^2}{2} \right. \\ \left. + \sum_{j=1}^{N-2} \frac{R^2}{2} (\epsilon_j - \epsilon_{j+1}) \left(P_{Ou, jj}^2 - \frac{\epsilon_j}{\epsilon_{j+1}} P_{1u, jj}^2 \right) \right]^{-1} \quad (4.45)$$

Posons maintenant

$$R_{Ou}^{(1)} = R_{Ou}^{(1)\eta} (\eta=\infty) \quad (4.46)$$

ce qui, au moyen de l'équation (4.45), implique

$$R_{Ou}^{(1)\eta} = \frac{R_{Ou}^{(1)}}{[1 + \exp(-2\kappa_{Ou}\eta)]} \quad (4.47)$$

Les champs à l'intérieur du tube d'insertion conducteur sont maintenant connus, ce qui va nous permettre de calculer la déviation du facteur de qualité $\delta(1/Q)$ et la déviation relative de la fréquence par rapport à la cavité idéale.

4.3 Calcul de $(\delta f)/f$ et $\delta(1/Q)$ par rapport à la cavité idéale

4.3.1 Calcul de la déviation relative de fréquence $(\delta f)/f$

On calcule cette déviation relative de fréquence en utilisant le théorème d'invariance adiabatique[9][10].

Théorème d'invariance adiabatique

Soit une cavité fermée, sans pertes diélectriques ni ohmiques, et déformée adiabatiquement. La déviation relative de la fréquence de résonance est alors égale au changement relatif d'énergie emmagasinée.

$$\frac{\delta f}{f_0} = \frac{\delta W}{W_0} \quad (4.48)$$

Par déformation adiabatique, on entend une déformation effectuée uniformément et infiniment lentement, ce qui fait que l'énergie introduite n'a qu'une composante de fréquence nulle.

Démonstration[9]

Soit une cavité fermée qu'on déforme adiabatiquement (figure(4.4)). A l'intérieur de la cavité originale, on a un champ électromagnétique qui vibre à la fréquence f_0 . D'un point de vue quantique, on a donc N_p photons qui vibrent à la fréquence f_0 . L'énergie emmagasinée est donnée par

$$W_0 = N_p h f_0 \quad (4.49)$$

Lorsqu'on déforme la cavité, le nombre de photons est constant, car il n'y a pas de pertes électromagnétiques. D'où

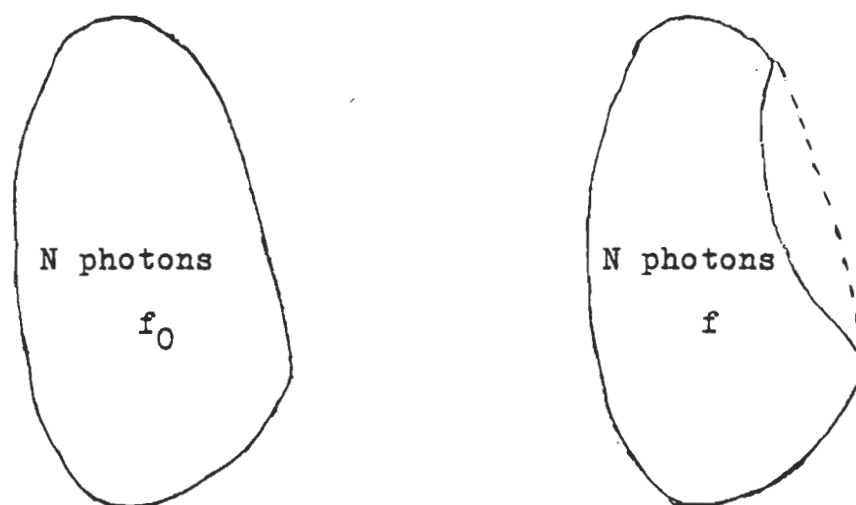


Figure 4.4 Déformation adiabatique d'une cavité.

$$\delta W = N_p h \delta f \quad (4.50)$$

c'est-à-dire

$$\frac{\delta f}{f_0} = \frac{\delta W}{W_0} \quad (4.51a)$$

Lorsqu'il y a des pertes électromagnétiques, on croit que le théorème est encore valide, puisque dans ce cas la déviation relative de la fréquence de résonance à l'instant t est égale à

$$\frac{\delta f}{f_0} = \frac{\delta W_{\text{Tot}}(t) - hf \delta N(t)}{W_0(t)} \quad (4.51b)$$

$$\left\| \begin{array}{l} \delta W_{\text{Tot}}(t) : \text{changement d'énergie totale dû aux} \\ \text{pertes et à la déformation de la} \\ \text{cavité à l'instant } t \\ \\ hf \delta N(t) : \text{énergie dissipée dans la cavité à} \\ \text{l'instant } t \end{array} \right.$$

$$= \frac{\delta W_{\text{def}}(t)}{W_0(t)} \quad (4.52)$$

où $\delta W_{\text{def}}(t)$ est le changement d'énergie emmagasinée à l'instant t , en déformant la cavité.

Le travail effectué par le champ électromagnétique, pour transformer la cavité idéale en une cavité ayant un tube d'insertion conducteur fermé par deux bouchons parfaitement

conducteurs à $\eta=\infty$ (figure 4.3), est égal à $-\delta W_{\text{d\acute{e}f}}$ et est donné par

$$-\delta W_{\text{d\acute{e}f}} = 2 \int_{z=0}^{\infty} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{z} \quad (4.53)$$

où \mathbf{F} est la force moyenne exercée par le champ électromagnétique sur la surface de chaque bouchon parfaitement conducteur.

La composante F_z de la force électromagnétique moyenne exercée sur la surface d'un parfait conducteur est égale à la différence entre l'énergie magnétique et électrique moyenne à la surface considérée[9].

$$F_z = \frac{1}{4} \iint_S ds \{ \mu' \mathbf{H}(\mathbf{r}) \cdot \mathbf{H}^*(\mathbf{r}) - \epsilon' \mathbf{E}(\mathbf{r}) \cdot \mathbf{E}^*(\mathbf{r}) \} \quad (4.54)$$

A la surface des bouchons parfaitement conducteurs ($z=\eta$), on a des équations (4.36) - (4.38)

$$E_z(z=\eta) = \sum_{u=1}^{\infty} \frac{R_{Ou}^{(1)} P_{Ou}(r)^2}{[1 + \exp(-2\kappa_{Ou}\eta)]} \exp(-\kappa_{Ou}\eta) \quad (4.55)$$

$$E_r(z=\eta) = 0 \quad (4.56)$$

$$H_{\phi}(z=\eta) = \sum_{u=1}^{\infty} \frac{i\omega\epsilon R_{Ou}^{(1)} P_{1u}(r)^2}{\kappa_{Ou} [1 + \exp(-2\kappa_{Ou}\eta)]} \exp(-\kappa_{Ou}\eta) \quad (4.57)$$

Ici, on a utilisée l'équation (4.47) et l'égalité suivante.

$$R_{Ou}^{(1)} = R_{Ou}^{(1)} \eta \quad (\eta = \infty) \quad (4.58)$$

Les équations précédentes peuvent s'écrire de manière plus simple comme

$$E_z(z=\eta) = \sum_{u=1}^{\infty} R_{Ou}^{(1)} P_{Ou}(r) [\cosh(\kappa_{Ou}\eta)]^{-1} \quad (4.59)$$

$$E_r(z=\eta) = 0 \quad (4.60)$$

$$H_{\phi}(z=\eta) = \sum_{u=1}^{\infty} \frac{i\omega\epsilon R_{Ou}^{(1)}}{\kappa_{Ou}} P_{1u}(r) [\cosh(\kappa_{Ou}\eta)]^{-1} \quad (4.61)$$

Des équations (4.53) et (4.54), on obtient

$$\begin{aligned} \delta W_{\text{def}} &= 2 \operatorname{Re} \frac{1}{4} \int_V dv \{ \epsilon \mathbf{E} \cdot \mathbf{E}^* \} - 2 \operatorname{Re} \frac{1}{4} \int_V dv \{ \mu \mathbf{H} \cdot \mathbf{H}^* \} \\ &\approx 2 \operatorname{Re} \frac{1}{4} \int_V dv \epsilon \mathbf{E} \cdot \mathbf{E} \end{aligned} \quad (4.62)$$

La contribution du champ magnétique est négligeable devant celle du champ électrique, puisque $\omega^2 \mu \epsilon \ll \kappa_{Ou}^2$ (voir la discussion précédant l'équation (4.13)). L'intégrale est effectuée sur le volume du tube, et le champ électrique \mathbf{E} est donné par l'équation (4.59). On trouve donc

$$\delta W_{\text{d\acute{e}f}} = \frac{1}{2} \operatorname{Re} \left[\sum_{u=1}^{\infty} \sum_{v=1}^{\infty} R_{Ou} R_{Ov}^* \int_0^{\infty} dz [\cosh(\kappa_{Ou} z) \cosh(\kappa_{Ov}^* z)]^{-1} \right. \\ \left. 2\pi \int_0^{R_{N-1}} r dr \xi_{P_{Ou}}(r) P_{Ov}^*(r) \right] \quad (4.63)$$

Lorsqu'il n'y a pas de confusion possible, nous omettons l'indice sup\'erieur (1) au facteur d'amplitude R_{Ou} , comme on a fait dans l'\acute{equation (4.63).

On sait que

$$J_0^*(\kappa_{Ou} r) = J_0(\kappa_{Ou}^* r) \quad (4.64)$$

$$Y_0^*(\kappa_{Ou} r) = Y_0(\kappa_{Ou}^* r) \quad (4.65)$$

Ainsi, en utilisant l'\acute{equation (A.27), on obtient

$$\int_0^{R_{N-1}} r dr \xi_{P_{Ou}}(r) P_{Ov}^*(r) \\ = \sum_{j=1}^{N-1} \int_{R_{j-1}}^{R_j} r dr \xi_j P_{Ou}^{(j)}(r) P_{Ov}^{(j)*}(r)$$

$$= \sum_{j=1}^{N-1} \left(\frac{r \varepsilon_j}{\kappa_{Ov}^{*2} - \kappa_{Ou}^2} \left\{ -\kappa_{Ou} P_{Ov}^{(j)*}(r) P_{1u}^{(j)}(r) \right. \right. \\ \left. \left. + \kappa_{Ov}^{*} P_{Ou}^{(j)}(r) P_{1v}^{(j)*}(r) \right\} \right)_{R_{j-1}}^{R_j}$$

Les termes à $r=0$ s'annulent à cause du facteur r .

Les termes à $r=R_{N-1}$ s'annulent à cause de

$$P_{Ovj, N-1}^{*} \text{ et } P_{Ouj, N-1}$$

Tous les premiers termes de $\{ \}$ vont s'annuler entre eux à cause des équations (4.39) et (4.40)

$$\int_0^{R_{N-1}} r dr \varepsilon_j P_{Ou}^{(j)}(r) P_{Ov}^{(j)*}(r) \\ = \sum_{j=1}^{N-2} \frac{\kappa_{Ov}^{*} R_{j+1} P_{Ouj, j+1} P_{1vj, j+1}^{*}}{\kappa_{Ov}^{*2} - \kappa_{Ou}^2} \left(\varepsilon_j - \varepsilon_{j+1} \frac{\varepsilon_{j+1}^{*}}{\varepsilon_{j+1}^{*}} \right) \quad (4.66)$$

D'autre part, soit

$$I(\kappa_{Ou}, \kappa_{Ov}^{*}) = \int_0^{\infty} dz [\cosh(\kappa_{Ou} z) \cosh(\kappa_{Ov}^{*} z)]^{-1} \quad (4.67)$$

on a, alors

$$\delta W_{\text{d\`e}f} = \text{Re} \left[\sum_{u=1}^{\infty} \sum_{v=1}^{\infty} R_{Ou} R_{Ov}^* I(\kappa_{Ou}, \kappa_{Ov}^*) \frac{\kappa_{Ov}^*}{\kappa_{Ov}^{*2} - \kappa_{Ou}^2} \right. \\ \left. \left(2\pi i \sum_{j=1}^{N-2} R_j P_{Oujj} P_{1vjj}^* \frac{\text{Im}(\xi_j \xi_{j+1}^*)}{\xi_{j+1}^*} \right) \right] \quad (4.68)$$

Pour le cas réel, on calcule l'intégrale (4.63) en utilisant les équations (A.51) (A.52) et la relation suivante^[11],

$$\int \frac{dx}{\text{ch}^2 ax} = \frac{\text{th} ax}{a}$$

ce qui donne

$$\delta W_{\text{d\`e}f} = \sum_{u=1}^{\infty} \frac{\pi R_{Ou}^2}{\kappa_{Ou}} \left[\frac{1}{2} R_{N-1}^2 \xi_{N-1} P_{1u, N-1, N-1}^2 \right. \\ \left. + \sum_{j=1}^{N-2} \frac{1}{2} (\xi_j - \xi_{j+1}) \left(P_{Oujj}^2 - \frac{\xi_j}{\xi_{j+1}} P_{1ujj}^2 \right) \right] \quad (4.69a)$$

Avec les équations (4.46) et (4.45), on obtient alors

$$\delta W_{\text{d\`e}f} = \sum_{u=1}^{\infty} \frac{\pi R_{Ou} \xi_{N-1} R_{N-1} P_{1u, N-1, N-1}}{\kappa_{Ou}^2} \quad (4.69b)$$

La déviation relative de fréquence de résonance est donc donnée par les équations suivantes: pour le cas complexe,

$$\begin{aligned}
\frac{\delta f}{f} &= \frac{\delta W_{\text{def}}}{W} \\
&= \frac{1}{W} \operatorname{Re} \left(\sum_{u=1}^{\infty} \sum_{v=1}^{\infty} R_{Ou} R_{Ov}^* I(\kappa_{Ou}, \kappa_{Ov}^*) \frac{\kappa_{Ov}^*}{\kappa_{Ov}^2 - \kappa_{Ou}^2} \right) \\
&\quad \left(2\pi i \sum_{j=1}^{N-2} R_j P_{Oujj} P_{1vjj}^* \frac{\operatorname{Im}(\epsilon_j \epsilon_{j+1}^*)}{\epsilon_{j+1}^*} \right) \quad (4.70)
\end{aligned}$$

et pour le cas réel

$$\frac{\delta f}{f} = \frac{1}{W} \sum_{u=1}^{\infty} \frac{\pi R_{Ou} \epsilon_{N-1} R_{N-1} P_{1u, N-1, N-1}}{\kappa_{Ou}^2} \quad (4.71)$$

où W est l'énergie emmagasinée dans la cavité, donnée par l'équation (2.115)

La différence avec d'autres traitements similaires [4][12] vient de ce que notre calcul du travail pour passer d'une configuration à l'autre a tenu compte de chaque position η des bouchons. De plus, on a respecté le fait que les champs peuvent être complexes.

4.3.2 Calcul de la déviation du facteur de qualité

$$\delta(1/Q_{s, \text{tube}})$$

L'existence des champs électromagnétiques dans le tube d'insertion conducteur infiniment long devra causer des

pertes d'énergie additionnelles, produisant ainsi une déviation du facteur de qualité $\delta(1/Q_{s, tube})$. Habituellement, les pertes diélectriques du tube capillaire sont négligeables: nous n'en tiendrons donc pas compte.

Le facteur de qualité est donné dans l'équation suivante:

$$\frac{1}{Q} \equiv \frac{P}{\omega' W} \quad (4.72)$$

Ces quantités correspondent à celles du système forcé, c'est-à-dire, $\omega''=0$.

La déviation du facteur de qualité est due au tube d'insertion conducteur et est produite par la partie de l'échantillon qui est dans le tube d'insertion conducteur. Celle-ci est égale à

$$\begin{aligned} \delta \left(\frac{1}{Q_{s, tube}} \right) &= \frac{P_{s, tube}}{\omega' W} \\ &= \frac{P_{s, tube}}{Q_{s, cavité} P_{s, cavité}} \end{aligned} \quad (4.73)$$

où $\delta(1/Q_{s, tube})$ est la déviation du facteur de qualité due à la partie de l'échantillon situé dans le tube d'insertion conducteur;

$P_{s, tube}$ est la puissance dissipée par l'échantillon situé

dans le tube d'insertion conducteur;

$P_s^{\text{cavité}}$ est la puissance dissipée par l'échantillon situé dans la cavité;

$Q_s^{\text{cavité}}$ est le facteur de qualité dû à la partie de l'échantillon située dans la cavité.

En substituant dans l'équation (4.73) l'expression (2.106) de la puissance dissipée, on obtient

$$\delta \left(\frac{1}{Q_{s, \text{tube}}} \right) = \frac{1}{Q_s^{\text{cavité}}} \frac{\int_{\text{tube}} dv \, \epsilon''_j |E|^2}{\int_{\text{cavité}} dv \, \epsilon''_j |E|^2} \quad (4.74)$$

L'intégrale dans le tube d'insertion conducteur est égale à deux fois l'intégrale de la partie supérieure ou inférieure du tube. Nous allons considérer le cas où seul $\epsilon''_1 \neq 0$, c'est-à-dire que les pertes se font dans le matériau central seulement. En utilisant les expressions (4.36) et (4.37) des champs dans le tube d'insertion conducteur pour $\eta = \infty$, et l'équation (A.27), on trouve

$$\int_{\text{tube}} dv \, \mathbf{E} \cdot \mathbf{E}^* = 2 \int_{z=0}^{\infty} dz \int_{r=0}^{R_1} 2\pi r \, dr \, (|E_z|^2 + |E_r|^2)$$

milieu un

$$\begin{aligned}
&= \sum_{u=1}^{\infty} \sum_{v=1}^{\infty} R_{Ou} R_{Ov}^* \int_0^{\infty} dz \exp(-[\kappa_{Ou} + \kappa_{Ov}^*] z) \\
&\quad \left(\int_0^{R_1} dr \, 4\pi r \{ J_0(\kappa_{Ou} r) J_0(\kappa_{Ov}^* r) + J_1(\kappa_{Ou} r) J_1(\kappa_{Ov}^* r) \} \right) \\
&= \sum_{u=1}^{\infty} \sum_{v=1}^{\infty} R_{Ov}^* M_{vu} R_{Ou} \quad (4.75)
\end{aligned}$$

où

$$\begin{aligned}
M_{vu} &= \frac{4\pi R_1}{(\kappa_{Ov}^*{}^2 - \kappa_{Ou}^2)} [J_{Ou1} (J_{v1}^*)^* - (J_{Ov1}^*)^* J_{u1}] \\
&= M_{uv}^* \quad (4.76)
\end{aligned}$$

D'autre part en utilisant les équations (A.27) et (A.32), on trouve pour le cas réel

$$\begin{aligned}
\int_{\text{tube}} dv \, E^2 &= \sum_{u=1}^{\infty} \frac{R_{Ou}^2}{\kappa_{Ou}} [R_1^2 \{ (J_{Ou1})^2 + (J_{u1}^2) \} \\
&\quad - (R_1 / \kappa_{Ou}) J_{Ou1} J_{u1}] + \sum_{\substack{u=1 \\ u \neq v}}^{\infty} \sum_{v=1}^{\infty} R_{Ov} M_{vu} R_{Ou} \quad (4.77)
\end{aligned}$$

Calculons maintenant les pertes dans la cavité. En négligeant les modes supérieurs, les champs à l'intérieur de la cavité sont donnés par

$$E_{zc} = [A_{0m} J_0(k_{rm}r) + B_{0m} Y_0(k_{rm}r)] \cos(p\pi z/h) \quad (4.78)$$

$$E_{rc} = \frac{p\pi}{hk_{rm}} [A_{0m} J_1(k_{rm}r) + B_{0m} Y_1(k_{rm}r)] \sin(p\pi z/h) \quad (4.79)$$

$$H_{\phi c} = \frac{i\omega\epsilon}{k_{rm}} [A_{0m} J_1(k_{rm}r) + B_{0m} Y_1(k_{rm}r)] \cos(p\pi z/h) \quad (4.80)$$

où

$$k_{rm}^2 = -(p\pi/h)^2 + \omega^2 \mu\epsilon \quad (4.81)$$

$$A_{0m}^{(1)} = 1 \quad B_{0m}^{(1)} = 0 \quad (4.82)$$

Puisque le rayon du tube d'insertion conducteur est beaucoup plus petit que celui de la cavité, on peut écrire pour $r < R_1$

$$J_0(k_{rm}r) \approx 1 \quad (4.83)$$

$$J_1(k_{rm}r) \approx k_{rm}r / 2$$

$$\approx 0 \quad (4.84)$$

On a donc approximativement

$$\int_{\text{cavité}} \int_{\text{milieu un}} dv |E|^2 \approx \int_0^h dz \int_0^{R_1} 2\pi r dr (E_{zc}^2 + E_{rc}^2) \\ \approx \pi h \Delta R_1^2 \quad (4.85)$$

où

$$\Delta = \begin{cases} 1 & ; p = 0 \\ 1/2 & ; p \neq 0 \end{cases} \quad (4.86)$$

Substituons maintenant les équations (4.75) et (4.85) dans l'équation (4.74), ce qui donne

$$\delta \left(\frac{1}{Q_{S, \text{tube}}} \right) = \frac{1}{Q_{S, \text{cavité}} \pi h \Delta R_1^2} \sum_{u=1}^{\infty} \sum_{v=1}^{\infty} R_{Ov}^* M_{vu} R_{Ou} \quad (4.87)$$

Pour le cas réel, on trouve

$$\delta \left(\frac{1}{Q_{S, \text{tube}}} \right) = \frac{1}{Q_{S, \text{cavité}} \pi h \Delta R_1^2} \left[\sum_{u=1}^{\infty} \frac{R_{Ou}^2}{\kappa_{Ou}} \{ R_1^2 [(J_{Ou1})^2 + (J_{1u1})^2] - (R_1 / \kappa_{Ou}) J_{Ou1} J_{1u1} \} + \sum_{\substack{u=1 \\ u \neq v}}^{\infty} \sum_{v=1}^{\infty} R_{Ov} M_{vu} R_{Ou} \right] \quad (4.88)$$

La fréquence de résonance complexe étant donnée par l'équation (1.17), la déviation relative de la fréquence de résonance complexe est donnée par

$$\delta \omega = \delta \omega_r + i \left(\frac{\delta \omega_r}{2Q} + \frac{\omega_r}{2} \delta \left(\frac{1}{Q} \right) \right)$$

$$\begin{aligned} \frac{\delta\omega}{\omega_r} &= \frac{\delta\omega_r}{\omega_r} + i \left(\frac{1}{2Q} \frac{\delta\omega_r}{\omega_r} + \frac{1}{2} \delta \left(\frac{1}{Q} \right) \right) \\ &\approx \frac{\delta\omega_r}{\omega_r} + i \frac{1}{2} \delta \left(\frac{1}{Q} \right) \end{aligned} \quad (4.89)$$

La déviation relative de la fréquence de résonance complexe est maintenant connue, puisque la déviation de la partie réelle de la fréquence est donnée par l'équation (4.70), et la déviation de l'inverse du facteur de qualité par l'équation (4.87).

La partie la plus importante de ce chapitre est terminée. Nous connaissons maintenant la déviation de la fréquence de résonance relativement à la cavité fermée. Nous pouvons utiliser l'équation caractéristique correspondante, et ainsi obtenir des mesures précises de permittivité.

4.4 Erreur relative sur la mesure de la permittivité

La déviation relative de fréquence de résonance complexe (équation (2.126)) produite en introduisant l'échantillon (milieu 1) dans la cavité idéale, indépendamment des autres matériaux, est

$$\frac{\omega_{\text{mat}}^s - \omega_{\text{mat}}}{\omega_{\text{mat}}} = \frac{x_{0m}^2 R^2}{\{x_{0m}^2 + (p\pi R_N / h)^2\} 2J_1^2(x_{0m}) R_N^2} \left(1 - \frac{\epsilon_1}{\epsilon_0} \right) \quad (4.90)$$

où ω_{mat} et ω_{mat}^s sont les fréquences de résonance, sans l'échantillon, puis avec lui respectivement.

L'équation caractéristique de la cavité idéale (équation (2.80)), se ramène à cette dernière équation, lorsque les matériaux à l'intérieur ont de petits rayons par rapport à celui de la cavité. On peut aussi obtenir cette équation en utilisant la théorie des perturbations [5], [8].

Cette relation est valide uniquement pour une cavité idéale. Si on l'utilise pour la cavité munie d'un tube d'insertion conducteur, alors on obtiendra une valeur erronée de la permittivité efficace ϵ_1 . D'autre part, si nous avons utilisé l'équation caractéristique exacte (2.80) de la cavité idéale au lieu de l'équation caractéristique approximative (4.90) nous n'aurions pas nécessairement obtenu la même valeur erronée de permittivité (efficace). Non pas que l'une soit une forme approximative de l'autre; mais les paramètres mesurables de ces deux équations sont différents. Pour l'équation caractéristique approximative (4.90) les fréquences sans et avec l'échantillon, ω_{mat} et ω_{mat}^s respectivement, seront erronées, tandis que pour l'équation exacte, seule la fréquence de résonance complexe avec

l'échantillon ω_{mat}^S le sera. Par conséquent, les erreurs introduites sur la mesure de la permittivité efficace peuvent être différentes pour chaque équation caractéristique. Dans les deux cas, pour obtenir des mesures précises de permittivité efficace, il suffit de corriger les valeurs mesurées de fréquence de résonance complexe. C'est pourquoi le calcul de la déviation de fréquence de résonance complexe due au tube d'insertion conducteur était la partie la plus importante de ce chapitre.

Lorsqu'on utilise l'équation caractéristique approximative (4.90) à la place de celle de la cavité ayant un tube d'insertion conducteur, il est possible d'obtenir les valeurs explicites de l'erreur relative sur la mesure de la permittivité de l'échantillon (placé au centre). Cela n'est pas possible avec l'équation caractéristique exacte (2.80).

Soit

$$\tilde{\omega}_{\text{mat}} = \omega_{\text{mat}} + \delta\omega_{\text{mat}} \quad (4.91)$$

$$\tilde{\omega}_{\text{mat}}^S = \omega_{\text{mat}}^S + \delta\omega_{\text{mat}}^S \quad (4.92)$$

où les " \sim " indiquent les mesures obtenues de la cavité ayant un tube d'insertion conducteur. En utilisant l'équation caractéristique approximative (4.90), on obtient une valeur erronée de la permittivité efficace $\tilde{\xi}_1$

$$\frac{\tilde{\omega}_{mat}^s - \tilde{\omega}_{mat}}{\tilde{\omega}_{mat}} = \frac{x_{Om}^2 R_1^2}{\{x_{Om}^2 + (p\pi R_N / h)^2\} J_1^2(x_{Om}) R_N^2} \left(1 - \frac{\tilde{\xi}_1}{\xi_0} \right) \quad (4.93)$$

L'erreur théorique ainsi introduite sera

$$\delta \left(\frac{\xi_1}{\xi_0} - 1 \right) = \frac{\{x_{Om}^2 + (p\pi R_N / h)^2\} J_1^2(x_{Om}) R_N^2}{x_{Om}^2 R_1^2} \left[\left(\frac{\omega_{mat}^s - \omega_{mat}}{\omega_{mat}} \right) - \left(\frac{\tilde{\omega}_{mat}^s - \tilde{\omega}_{mat}}{\tilde{\omega}_{mat}} \right) \right] \quad (4.94)$$

$$\text{ou } \delta \xi_1 = \tilde{\xi}_1 - \xi_1.$$

En prenant la partie imaginaire de cette équation, et en utilisant l'équation (1.18), on obtient:

$$\delta \left(\frac{\xi_1''}{\xi_0} \right) = \frac{\{x_{Om}^2 + (p\pi R_N / h)^2\} J_1^2(x_{Om}) R_N^2}{x_{Om}^2 R_1^2} \left[\frac{1}{Q_{S \text{ cavité}}} - \frac{1}{Q_{S \text{ cavité+tube}}} \right]$$

$$= \frac{\{x_{Om}^2 + (p\pi R_N^2 / h)^2\} J_1^2(x_{Om}) R_N^2}{x_{Om}^2 R_1^2} \left(- \frac{1}{Q_{S, \text{tube}}} \right) \quad (4.95)$$

ou $Q_{S \text{ région}}$ est le facteur de qualité dû à la partie de

l'échantillon dans la région indiquée. En divisant l'équation (4.95) par la partie imaginaire de l'équation (4.90), on obtient:

$$\frac{\delta \epsilon''_1}{\epsilon''_1} = + \frac{Q_{s, \text{cavité}}}{Q_{s, \text{tube}}} \quad (4.96)$$

Substituons l'équation (4.87) (ou, dans le cas réel, (4.88)) dans l'équation (4.96). On obtient:

$$\frac{\delta \epsilon''_1}{\epsilon''_1} = + \frac{R_{N-1}}{h} D \quad (4.97)$$

où

$$D = \frac{1}{\pi \Delta R_{N-1} R_1^2} \sum_{u=1}^{\infty} \sum_{v=1}^{\infty} R_{0v}^* M_{uv} R_{0u} \quad (4.98)$$

D'autre part, en prenant la partie réelle de l'équation (4.90), on trouve:

$$\delta \left(\frac{\epsilon'_1}{\epsilon_0} - 1 \right) \approx \frac{\{x_{0m}^2 + (p\pi R_N / h)^2\}^2 J_1^2(x_{0m}) R_N^2}{x_{0m}^2 R_1^2} \left(\frac{f_{\text{mat}}^s - \tilde{f}_{\text{mat}}^s}{f_{\text{mat}}^s} - \frac{f_{\text{mat}} - \tilde{f}_{\text{mat}}}{f_{\text{mat}}} \right) \quad (4.99)$$

d'où

$$\frac{\delta \left(\frac{\epsilon'_1}{\epsilon_0} - 1 \right)}{\left(\frac{\epsilon'_1}{\epsilon_0} - 1 \right)} = - \frac{R_{N-1}}{h} C \quad (4.100)$$

où

$$C = \frac{\{x_{0m}^2 + (p\pi R_N / h)^2\} 2 J_1^2(x_{0m}) \epsilon_0 R_N^2 h}{(\epsilon'_1 - \epsilon_0) x_{0n}^2 R_1^2 R_{N-1}}$$

$$\left(\frac{\delta f_{mat}^s}{f_{mat}^s} - \frac{\delta f_{mat}}{f_{mat}} \right) \quad (4.101)$$

Les déviations relatives de fréquence $\delta f/f$ sont données par les équations (4.70) et (4.71).

Les corrections à effectuer sur les valeurs mesurées de la permittivité, à l'aide de l'équation caractéristique approximative (4.90), sont maintenant connues, ce qui termine la partie théorique sur les effets de bouts.

CHAPITRE V

PROGRAMMATION (MODE TM_{0m0})

5.1 Introduction

Dans les chapitres précédents, nous avons donné la théorie pour une cavité cylindrique ayant des parois de conductivité finie et possédant un tube d'insertion de même matériel (figure 4.1). Les résultats des chapitres trois et quatre, pris dans leur ensemble, nous donnent la relation théorique qui existe entre la permittivité efficace ξ et la fréquence de résonance complexe ω d'une telle cavité. Cette relation est donnée par les équations (5.1) et (5.2).

$$\omega_{\text{fermé}} = \omega \left(1 - \frac{\delta\omega}{\omega} \right) \quad (5.1)$$

$$F(\xi, \omega_{\text{fermé}}) = 0 \quad (5.2)$$

où

$$\frac{\delta\omega}{\omega} = \frac{\delta f_{\text{tube}}}{f} + \frac{1}{2} \left(\delta \frac{1}{Q_{s, \text{tube}}} + \delta \frac{1}{Q_{\text{cond}}} \right) \quad (5.3)$$

$\frac{\delta f_{\text{tube}}}{f}$, $\delta \frac{1}{Q_{s, \text{tube}}}$ sont les déviations de fréquence, équation (4.70), et de facteur de qualité, équation (4.87), dues au tube d'insertion conducteur par rapport à la cavité fermée;

$\delta \frac{1}{Q_{\text{cond}}}$ est la déviation du facteur de qualité (équation (3.32)) produite par la conductivité des parois des bouts de la cavité fermée;

ω est la fréquence de résonance de la cavité avec les parois de conductivité finie et possédant un tube d'insertion conducteur;

$\omega_{\text{fermé}}$ est la fréquence de résonance de la cavité, si celle-ci est fermée et a des bouts parfaitement conducteurs;

ϵ est la permittivité efficace de l'échantillon, qu'on cherche à calculer;

F est l'équation caractéristique d'une cavité cylindrique fermée ayant des bouts parfaitement conducteurs. C'est l'équation (2.80) avec les changements (3.20) et (3.21), mais exprimée sous une forme plus simple.

Nos résultats ont été dérivés pour le cas où le rayon du tube d'insertion conducteur est beaucoup plus petit que celui

du corps principal de la cavité et où la conductivité des parois est quand même assez élevée, sans être infinie. Généralement, les cavités utilisées pour les mesures de permittivité satisfont à ces conditions.

Donc, nous pouvons maintenant calculer la valeur de la permittivité d'un échantillon donné, à partir de la mesure de la fréquence de résonance f et du facteur de qualité Q , obtenue pour une cavité conductrice et possédant un tube d'insertion de même matériel. Ce calcul fera l'objet du présent chapitre.

La méthode utilisée pour ce calcul sera la suivante:

- 1- Au départ, on mesure la fréquence de résonance f et le facteur de qualité Q de la cavité conductrice, munie de son tube d'insertion conducteur et contenant l'échantillon.
- 2- On trouve une valeur approximative de la permittivité de l'échantillon en utilisant directement l'équation caractéristique (5.2).
- 3- En utilisant cette valeur approximative dans l'équation caractéristique (4.27) des champs à l'intérieur du tube d'insertion conducteur, on trouve les 15 premiers nombres d'ondes k_{0u} . La contribution à la déviation de fréquence venant principalement des

trois premiers modes, nous obtiendrons des calculs très précis pour cette déviation. On calcule ensuite les facteurs d'amplitude $R_{Ou}^{(1)}$, (équation (4.45)), et finalement on calcule la déviation de fréquence complexe due au tube d'insertion conducteur (à partir des équations (4.70) et (4.87)).

- 4- On calcule la déviation de facteur de qualité $\delta(1/Q_{cond})$ (équation (3.32)) due à la conductivité des parois des bouts de la cavité fermée.
- 5- On calcule la fréquence de résonance de la cavité fermée $\omega_{fermé}$ (équation (5.1)), et ensuite on trouve la valeur de la permittivité de l'échantillon à l'aide de l'équation (5.2).

L'équation caractéristique (5.2) de la cavité fermée avec des bouts parfaitement conducteurs, de même que l'équation caractéristique (4.27) de l'intérieur du tube conducteur, sont des équations transcendantes; en d'autres termes, elles ne possèdent pas de solutions sous forme explicite. Pour les résoudre, nous avons procédé par essais et erreurs combinés avec la méthode de convergence de Raphson-Newton[13].

Les divers calculs et opérations, qui mènent à la valeur précise de la permittivité de l'échantillon donné, sont trop

nombreux, difficiles et fastidieux pour qu'on essaie de les faire manuellement. C'est pourquoi nous avons écrit un programme informatique, lequel est donné dans l'annexe C.

Lorsqu'on effectue des mesures de permittivité, la cavité cylindrique vibre habituellement dans un mode TM_{0m0} et contient au maximum trois diélectriques: l'échantillon au centre, un tube capillaire (de faible perte diélectrique) si l'échantillon est liquide, et finalement de l'air, comme dans la figure 5.1. Par conséquent, notre programme a été construit pour cette configuration vibrant dans le mode TM_{0m0} .

Dans la section 5.2, nous exposerons la méthode utilisée pour résoudre les équations caractéristique (5.2) et (4.27). A la section 5.3, nous devrons expliquer les étapes suivies pour calculer la déviation de fréquence complexe par rapport à la cavité fermée ayant des bouts parfaitement conducteurs. Finalement, dans la section 5.4, on donnera l'organigramme du programme au complet, avec explication de diverses sous-routines.

5.2 Résolution numérique des équations caractéristiques

Notre programme a été conçu pour une cavité cylindrique contenant trois diélectriques et vibrant dans le

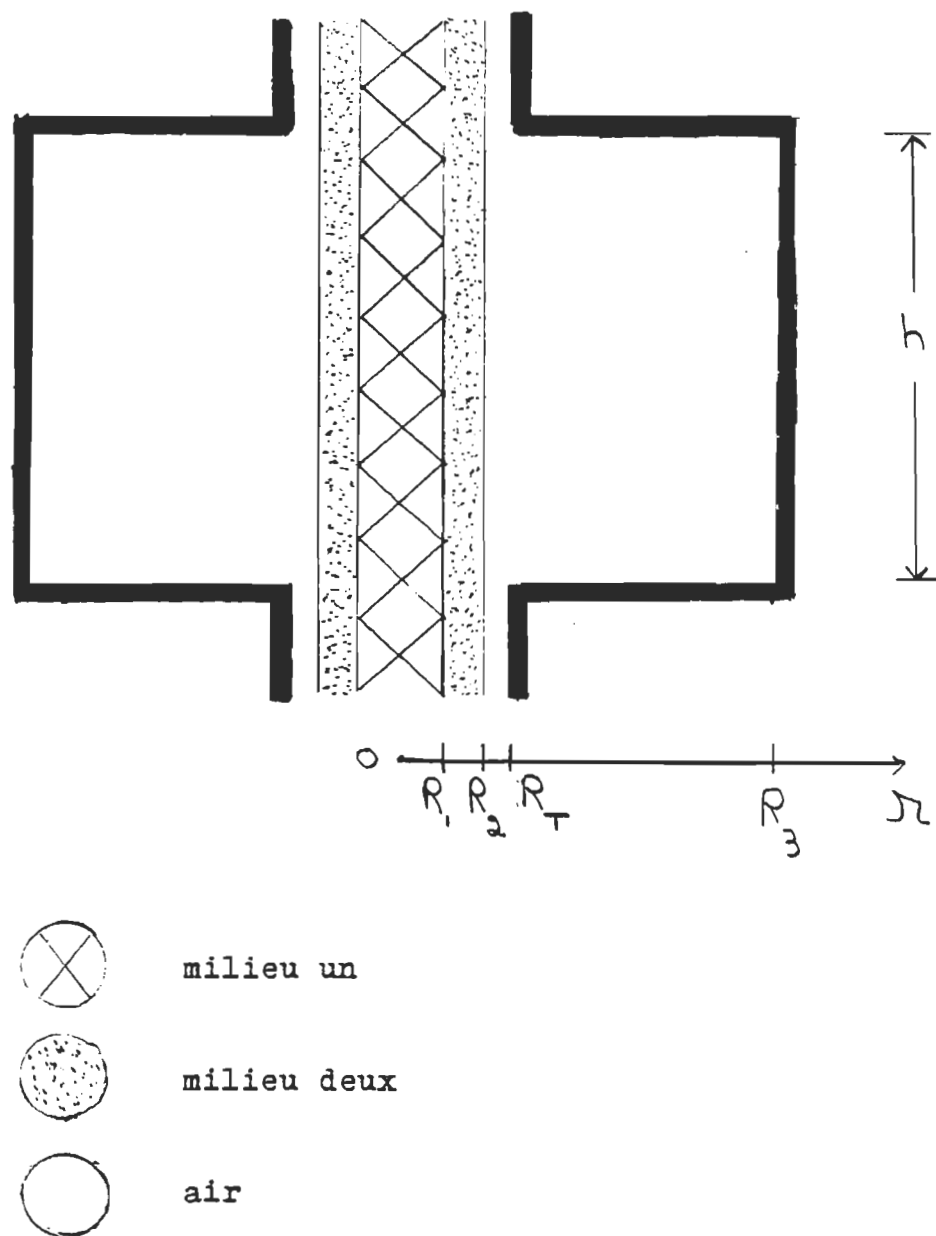


Figure 5.1 Configuration de la cavité que le programme PERMI considère.

mode TM_{0m0} (figure 5.1). Dans un tel cas, l'équation caractéristique (5.2) de la cavité fermée ayant des bouts parfaitement conducteurs est donnée par

$$F(\epsilon_1, \epsilon_2, \omega_{\text{fermé}}) = \left(\frac{\epsilon_1}{\epsilon_2} \right)^{1/2} - \frac{J_{011} \{Y_{121} \alpha - \beta J_{121}\}}{J_{111} \{Y_{021} \alpha - \beta J_{021}\}} = 0 \quad (5.4)$$

où

$$\alpha = J_{022} \{\psi J_{132} - Y_{132} \tau\} + (\epsilon_2)^{1/2} J_{122} \{Y_{032} \tau - \psi J_{032}\} \quad (5.5)$$

$$\beta = Y_{022} \{\psi J_{132} - Y_{132} \tau\} + (\epsilon_2)^{1/2} Y_{122} \{Y_{032} \tau - \psi J_{032}\} \quad (5.6)$$

$$\tau = J_{033} - \left(-\frac{i\omega\epsilon_0}{\sigma_w} \right)^{1/2} J_{133} \quad (5.7)$$

$$\psi = Y_{033} - \left(-\frac{i\omega\epsilon_0}{\sigma_w} \right)^{1/2} Y_{133} \quad (5.8)$$

$$J_{ijm} = J_i(k_r^{(j)} R_m) \quad (5.9a)$$

$$Y_{ijm} = Y_i(k_r^{(j)} R_m) \quad (5.9b)$$

$$(k_r^{(j)})^2 = \omega^2 \mu \epsilon \quad (5.10)$$

σ_w : conductivité de la paroi circulaire

Si l'on connaît la fréquence de résonance complexe $\omega_{\text{fermé}}$ et la permittivité des diélectriques autres que l'échantillon, cette équation caractéristique devient une équation à une inconnue,

$$F(\xi) = 0 \quad (5.11)$$

où ξ est la permittivité de l'échantillon qu'on veut déterminer.

Cette équation est une équation transcendante, c'est-à-dire qu'elle ne possède pas de solution explicite. Par conséquent, pour la résoudre nous devons procéder par essais et erreurs. La permittivité efficace ξ pouvant être complexe, on doit chercher la solution dans le plan complexe; cela complique un peu les choses, car on ne sait pas exactement dans quelle direction il faut se diriger.

Pour résoudre le problème, on utilise la méthode de Newton, aussi appelée méthode de Raphson-Newton^[13]. Cette méthode se base sur le développement en série de Taylor d'une fonction au voisinage d'un point.

Soit ρ_1 une valeur approchée de la valeur exacte de la permittivité efficace ξ . Par un développement de Taylor, on obtient:

$$\begin{aligned}
 F(\rho_I) &\approx F(\xi) + (\rho_I - \xi) \left(\frac{dF}{d\xi} \right) \\
 &\approx (\rho_I - \xi) \frac{dF}{d\xi}
 \end{aligned} \tag{5.12}$$

d'où

$$\xi \approx \rho_I - F(\rho_I) \left(\frac{dF}{d\xi} \right)^{-1}_{\rho_I} \tag{5.13}$$

Comme seconde approximation à ξ , on prend ρ_{II}

$$\rho_{II} = \rho_I - F(\rho_I) \left(\frac{dF}{d\xi} \right)^{-1}_{\rho_I} \tag{5.14a}$$

et ainsi de suite. Lorsqu'on est suffisamment près de la valeur exacte, cette méthode converge très rapidement.

La dérivée par rapport à x d'une fonction $f(x)$ est définie comme suit:

$$\frac{d f(x)}{dx} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} \tag{5.14b}$$

En utilisant cette définition dans l'équation (5.14a), on obtient une équation équivalente qui nous sera utile lorsque la dérivée de l'équation caractéristique ne sera pas connue explicitement.

$$\rho_{II} = \rho_I - \lim_{\Delta\rho_I \rightarrow 0} \frac{\Delta\rho_I}{\frac{F(\rho_I + \Delta\rho_I)}{F(\rho_I)} - 1} \quad (5.14c)$$

L'avantage d'utiliser la méthode de Newton, c'est qu'à chaque essai, on se rapproche davantage de la valeur exacte, et qu'on n'a pas à décider de la direction à prendre. Par contre, pour l'utiliser, nous devons connaître une valeur approchée du zéro qu'on cherche.

Si toutes les quantités connues ω , ϵ_1 ou ϵ_2 qui sont impliquées dans l'équation caractéristique $F(\xi)=0$ étaient réelles, les zéros de cette équation le seraient aussi. On s'attend à ce que ces zéros réels soient des valeurs suffisamment proches des zéros complexes pour que la méthode de Newton fonctionne; effectivement, on s'aperçoit en l'essayant qu'il en est bien ainsi.

La détermination des zéros réels n'est pas une tâche difficile. On sait que la partie réelle de la permittivité ϵ est supérieure ou égale à un. Par conséquent, procédant par essais et erreurs, nous débutons avec $\epsilon'=1$, pour ensuite se déplacer avec un pas de un, en suivant la direction positive de l'axe réel des ϵ' . La probabilité de tomber exactement sur le zéro réel étant minime, nous le cerurons en nous

basant sur le signe de l'équation caractéristique $F(\xi)$ pour chaque position ξ' .

Exemple:

Supposons qu'on connaisse $\omega_{\text{fermé}}$ et ξ_2 ; pour déterminer la permittivité $\xi = \xi_1$ de l'échantillon, on procédera comme suit.

- 1- On calcule $F(\xi=1)$
- 2- On avance d'un pas ($=1$) et on calcule $F(\xi=2)$. La valeur de l'équation caractéristique $F(\xi)$ n'a pas changé de signe parce qu'il n'y a pas de zéro réel entre $\xi=1$ et $\xi=2$. Par conséquent, nous avançons à $\xi=3$, et ainsi de suite. Si $F(\xi)$ change de signe, c'est qu'il y a un zéro entre $\xi=i$ et $\xi=i+1$; nous diminuons donc le pas de moitié et, repartant de $\xi=i$, on avance de nouveau, et ainsi de suite.
- 3- Lorsque l'intervalle de recherche est suffisamment petit, on a la valeur du zéro réel avec une précision égale à la moitié de la valeur du dernier pas.

En résumé, le zéro complexe de l'équation caractéristique $F(\xi)$ se détermine ainsi: en utilisant seulement la partie réelle des quantités connues (ω , ξ_1 ou ξ_2) impliquées dans cette équation, nous devons trouver, par changement de signe

de la fonction $F(\xi)$, les zéros réels avec une précision relative de 10^{-5} . Ensuite, reprenant les paramètres complexes, nous trouvons les zéros complexes en utilisant la méthode de Newton.

La recherche du zéro réel par changement de signe et du zéro complexe par la méthode de Newton sont effectuées respectivement par les sous-routines ZROREEL(F,X,PAS) et ZROCOMP(APPF,RO), où

APPF(RO) est la fonction qui donne une valeur approximative du zéro complexe comme dans l'équation (5.13);

F(X) est la fonction réelle, correspondant à l'équation complexe dans laquelle on a exprimé les paramètres sous forme réelle, et dont on veut trouver le zéro réel;

PAS est le pas de recherche.

L'équation caractéristique (4.27) de l'intérieur du tube conducteur, pour le cas illustré à la figure (5.1), est donnée par

$$G(k_{0u}, \xi_1, \xi_2) = \frac{\xi_1}{\xi_2} - \frac{J^{0u1} \{Y^{1u1} \Lambda - \Gamma J^{1u1}\}}{J^{1u1} \{Y^{0u1} \Lambda - \Gamma J^{0u1}\}}$$

$$= 0 \quad (5.15)$$

où

$$\begin{aligned} \Lambda = & J_{0u2} \{Y_{0u3} J_{1u2} - J_{0u3} Y_{1u2}\} \\ & + \epsilon_2 J_{1u2} \{J_{0u3} Y_{0u2} - Y_{0u3} J_{0u2}\} \end{aligned} \quad (5.16)$$

$$\begin{aligned} \Gamma = & Y_{0u2} \{Y_{0u3} J_{1u2} - J_{0u3} Y_{1u2}\} \\ & + \epsilon_2 Y_{1u2} \{J_{0u3} Y_{0u2} - Y_{0u3} J_{0u2}\} \end{aligned} \quad (5.17)$$

$$J_{1uJ} = J_1(\kappa_{0u} R_j) \quad (5.18)$$

$$Y_{1uJ} = Y_1(\kappa_{0u} R_j) \quad (5.19)$$

Puisque nous connaissons les permittivités ϵ_1 et ϵ_2 , cette équation caractéristique devient une fonction à une inconnue.

$$G(\kappa_{0u}) = 0 \quad (5.20)$$

Cette équation est encore une équation transcendante; pour la résoudre nous procédons d'une façon similaire à tout à l'heure.

Premièrement: en utilisant seulement les parties réelles de ϵ_1 et ϵ_2 dans l'équation caractéristique $G(\kappa_{0u})$, nous trouvons par changement de signe de cette équation les zéros réels correspondants. Ensuite, reprenant les valeurs complexes de ϵ_1 , ϵ_2 et utilisant la méthode de Newton, nous trouvons les zéros complexes de $G(\kappa_{0u})$ recherchés.

La partie réelle des nombres d'ondes κ_{Ou} est donnée par

$$\kappa_{Ou}' = \frac{2\pi}{\lambda} \quad (5.21)$$

ou λ est la longueur d'onde à l'intérieur du tube conducteur.

Par conséquent, les zéros réels κ_{Ou}' seront sur l'axe réel positif. Ayant examiné le spectre discret des κ_{Ou}' de différentes configurations, on décide arbitrairement de débiter la recherche réelle au vingtième du premier nombre d'ondes κ_{Ou}' de la cavité vide, et de choisir un pas de recherche égal au cinquième de ce même nombre d'ondes κ_{Ou}' . C'est-à-dire:

$$(\kappa_{Ou}')_{\text{départ}} = \frac{x_{01}}{20 R_T} \quad (5.22)$$

$$\text{PAS} = \frac{x_{01}}{5 R_T} \quad (5.23)$$

où x_{01} est le premier zéro de $J_0(x)$ et R_T est le rayon du tube d'insertion conducteur.

La recherche des zéros réels et complexes est encore effectuée par les sous-routines ZROREEL(F, X, PAS) et ZROCOMP(APPF, RO). Seuls les arguments dans le programme appelant changent.

5.3 Déviatiion relative de la fréquence de résonance $\delta\omega/\omega$

Nous allons calculer la déviatiion relative de la fréquence de résonance complexe $\delta\omega/\omega$ par rapport à la cavité fermée ayant des bouts parfaitement conducteurs. Evidemment, on considère que la cavité de la figure 5.1 vibre toujours dans le mode TM_{0m0} .

Explicitement, cette déviatiion relative de fréquence est utilisée pour transformer la fréquence de résonance complexe mesurée, en fréquence d'une cavité fermée ayant des bouts parfaitement conducteurs. Comme nous connaissons précisément l'équation caractéristique correspondante, nous pouvons obtenir des mesures précises de permittivité. En résumé, la précision des calculs de permittivité à partir de la fréquence de résonance dépend essentiellement de cette quantité.

5.3.1 Tube d'insertion conducteur

La déviatiion de la fréquence de résonance due au tube conducteur est donnée par l'équation (4.70) qui, dans notre cas, devient:

$$\frac{\delta f}{f} = \frac{1}{W} \operatorname{Re} \sum_{u=1}^{\infty} \sum_{v=1}^{\infty} \left(R_{Ou} R_{Ov}^* I(\kappa_{Ou}, \kappa_{Ov}^*) \frac{\kappa_{Ov}^*}{\kappa_{Ov}^{*2} - \kappa_{Ou}^2} \right. \\ \left. 2\pi i R_1 P_{Ou11} P_{1v11}^* \operatorname{Im} \epsilon_1 \right) \quad (5.24)$$

où

$P_{iujm} = P_{iu}^{(j)}(R_m)$, lesquels sont définis dans l'équation (4.35)

$$W = \operatorname{Re} \left[i\pi h R_1 J_{111}^* J_{011} \omega \left(\frac{\epsilon_1^*}{\mu_0} \right)^{1/2} \left[\frac{\epsilon_1}{\operatorname{Im}(\omega^2 \epsilon_1)} - \frac{1}{\operatorname{Im} \omega^2} \right] \right] \quad (5.25)$$

$$I(\kappa_{Ou}, \kappa_{Ov}^*) = \int_{z=0}^{\infty} dz [\cosh(\kappa_{Ou} z) \cosh(\kappa_{Ov}^* z)]^{-1} \quad (5.26)$$

Lorsque les quantités impliquées dans l'équation (5.24) sont toutes réelles, nous avons déjà obtenu, par la règle d'Hospital, l'équation suivante:

$$\frac{\delta f}{f} = \frac{1}{W} \sum_{u=1}^{\infty} \frac{\pi R_{Ou} R_T \epsilon_0 P_{1u, N-1, N-1}}{\kappa_{Ou}^2} \quad (5.27)$$

où, maintenant,

$$W = \frac{\pi h}{2} \left[\epsilon_0 R_3^2 Z_{133}^2 + (\epsilon_1 - \epsilon_2) R_1^2 J_{011}^2 + (\epsilon_2 - \epsilon_0) R_2^2 Z_{022}^2 \right] \quad (5.28)$$

$Z_{1jm} = Z_1(k_r^{(j)} R_m)$; lesquels sont définis dans l'équation (2.111).

La déviation de l'inverse du facteur de qualité $\delta(1/Q_{s, tube})$, causée par la partie de l'échantillon qui se trouve dans le tube conducteur, est donnée par:

$$\delta \left(\frac{1}{Q_{s, tube}} \right) = \frac{\epsilon''}{W} \int_{\substack{\text{tube} \\ \text{milieu un}}} dv |E|^2 \quad (5.29)$$

où

$$\int_{\substack{\text{tube} \\ \text{milieu un}}} dv |E|^2 = \sum_{u=1}^{\infty} \sum_{v=1}^{\infty} R_{0v}^* M_{vu} R_{0u} \quad (5.30)$$

$$M_{vu} = \frac{4\pi}{\kappa_{0v}^2 - \kappa_{0u}^2} R_1 \{ J_{0u1} (J_{1v1})^* - (J_{0v1})^* J_{1u1} \} \quad (5.31)$$

Dans le cas réel, W est donné par l'équation (5.28), et l'équation (5.30) devient:

$$\begin{aligned}
 \int_{\text{tube}} dv |E|^2 &= \sum_{u=1}^{\infty} \sum_{\substack{v=1 \\ u \neq v}}^{\infty} R_{Ov} M_{vu} R_{Ou} \\
 + \sum_{u=1}^{\infty} R_{Ou}^2 \frac{2\pi}{\kappa_{Ou}} &\left(R_1^2 [(J_{Ou1})^2 + (J_{1u1})^2] - \frac{R_1}{\kappa_{Ou}} J_{Ou1} J_{1u1} \right)
 \end{aligned}
 \tag{5.32}$$

Pour calculer les déviations (5.24) et (5.29), nous devons connaître les nombres d'ondes κ_{Ou} et les facteurs d'amplitude R_{Ou} de l'intérieur du tube conducteur. Les nombres d'ondes κ_{Ou} vont être calculés à l'aide de l'équation caractéristique (5.15) du tube conducteur,

$$G(\kappa_{Ou}, \epsilon_1, \epsilon_2) = 0 \tag{5.33}$$

Cette équation contient deux inconnues: le nombre d'ondes κ_{Ou} , et la permittivité ϵ de l'échantillon qui est la quantité finale que nous cherchons à connaître. En utilisant directement l'équation caractéristique de la cavité fermée ayant des bouts parfaitement conducteurs, c'est-à-dire en substituant directement la fréquence de résonance complexe mesurée dans cette équation, nous obtenons une valeur approximative de la permittivité de l'échantillon à quelques centièmes près. En prenant cette valeur approximative de permittivité pour trouver les nombres d'ondes κ_{Ou} de l'équation (5.15), nous obtiendrons par la suite des déviations de fréquence et de facteur de qualité précis à

quelque centièmes près. Par conséquent, les effets causés par le tube d'insertion seront corrigés, en gros, à 95 pour cent (dans la limite de nos approximations), donc presque entièrement corrigés.

En solutionnant l'équation caractéristique (5.15) comme dans la section 5.2, mais avec la valeur approximative de permittivité, nous trouvons donc le spectre discret des nombres d'ondes k_{0u} de l'intérieur du tube conducteur.

Les fonctions de Bessel et de Neumann contenues dans l'équation caractéristique précédente et dans d'autres équations dont nous aurons besoin plus tard, ont été calculées dans les sous-routines suivantes:

MMBSJO	calcul de $J_0(x)$
MMBSJ1	calcul de $J_1(x)$
MMBZJN	calcul de $J_n(z)$
MMBSYN	calcul de $Y_n(z)$
CYN	calcul de $Y_n(z)$

où n, x, z sont des nombres entiers, réels et complexes respectivement.

Les sous-routines débutant par les lettre MM sont des sous-routines de la librairie I.M.S.L. (international mathematical statistical library), tandis que la

sous-routine CYN a été développée par nous. Lorsque la norme de l'argument Z est inférieure ou égale à 12, la sous-routine CYN utilise le développement en série (A.3); pour des arguments supérieurs à 12, elle utilise les développements asymptotiques (A.38) et (A.39).

Les facteurs d'amplitude R_{Ou} sont donnés par l'équation (4.45), laquelle, pour le cas considéré, devient

$$R_{Ou}^{(1)} = \left(\frac{\xi_0 R_T P_{1u, N-1, N-1}}{\kappa_{Ou}} \right) \left[\frac{R_T^2}{2} \xi_0 P_{1u, N-1, N-1}^2 + \frac{R_1^2}{2} (\xi_1 - \xi_2) \left(J_{Ou11}^2 - \frac{\xi_1}{\xi_2} J_{1u11}^2 \right) + \frac{R_2^2}{2} (\xi_2 - \xi_0) \left(P_{Ou11}^2 - \frac{\xi_2}{\xi_0} P_{1u11}^2 \right) \right]^{-1} \quad (5.34)$$

Connaissant le spectre des nombres d'ondes κ_{Ou} , on calcule directement de cette équation les facteurs d'amplitude R_{Ou} . Dans le programme informatique, ce calcul a été fait par la sous-routine COEFC.

Les nombres d'ondes κ_{Ou} et les facteurs d'amplitude R_{Ou} étant maintenant connus, nous pouvons calculer les déviations $\delta f/f$ et $\delta(1/Q_{S, tube})$ directement des équations (5.24) et (5.29). Le calcul de la déviation de l'inverse du facteur de qualité $\delta(1/Q_{S, tube})$ a été fait à l'aide des sous-routines

suivantes: CALCUL1, WCAVITE et TRANSF. L'énergie W de la cavité et l'intégrale (5.30) ont été calculées par les sous-routines WCAVITE et CALCUL1 respectivement. Par la suite, dans la sous-routine TRANSF, nous avons effectué le calcul final de $\delta(1/Q_s, \text{tube})$.

Le calcul de la déviation de fréquence $\delta f/f$ est plus complexe à cause du terme $I(\kappa_{Ou}, \kappa_{Ov}^*)$, lequel est défini comme suit:

$$I(\kappa_{Ou}, \kappa_{Ov}^*) = \int_0^{\infty} dz [\cosh(\kappa_{Ou} z) \cosh(\kappa_{Ov}^* z)]^{-1} \quad (5.35)$$

où

$$\kappa_{Ou} = \kappa'_{Ou} + i \kappa''_{Ou} \quad (5.36)$$

$$\kappa_{Ov} = \kappa'_{Ov} + i \kappa''_{Ov} \quad (5.37)$$

On a

$$\begin{aligned}
 I(\kappa_{Ou}, \kappa_{Ov}^*) &= \int_0^{\infty} dz \, 4 \exp\{-(\kappa'_{Ou} + \kappa'_{Ov}) z\} \\
 &\quad \left(\frac{\exp(-i \kappa''_{Ou} z)}{(1 + \exp(-2 \kappa'_{Ou} z) \exp(-2 i \kappa''_{Ou} z))} \right) \\
 &\quad \left(\frac{\exp(i \kappa''_{Ov} z)}{(1 + \exp(-2 \kappa'_{Ov} z) \exp(2 i \kappa''_{Ov} z))} \right) \quad (5.38)
 \end{aligned}$$

L'intégrant aura une courbe exponentielle décroissante. Pour calculer l'intégrale, nous allons négliger la partie où l'intégrant est inférieur à 4×10^{-4} , ce qui introduit ainsi une erreur relative du même ordre. Lorsque les valeurs de z sont élevées, la norme de l'intégrant est approximativement égale à l'expression suivante:

$$\begin{aligned}
 | \text{intégrant} | &\approx | 4 \exp(-\{\kappa'_{Ov} + \kappa'_{Ou}\} z) \\
 &\quad \exp(-i\{\kappa''_{Ou} - \kappa''_{Ov}\} z) | \\
 &= 4 \exp(-\{\kappa'_{Ov} + \kappa'_{Ou}\} z) \quad (5.39)
 \end{aligned}$$

Celui-ci sera supérieur ou égal à 4×10^{-4} , pour toute valeur de z qui satisfait la condition suivante:

$$z \geq \frac{9.2103}{\kappa'_{Ou} + \kappa'_{Ov}} \quad (5.40)$$

En intégrant entre $z=0$ et la valeur maximum de l'équation

(5.40), nous aurons la valeur de $I(\kappa_{Ou}, \kappa_{Ov}^*)$ avec une erreur relative de 4×10^{-4} approximativement.

$$I(\kappa_{Ou}, \kappa_{Ov}^*) \approx \int_{z=0}^{z_{\max}} dz [\cosh(\kappa_{Ov}^* z) \cosh(\kappa_{Ou} z)]^{-1} \quad (5.41)$$

Nous calculons cette intégrale avec le programme DCADRE de la librairie I.M.S.L.; les paramètres choisis sont tels que nous aurons une précision relative de 1×10^{-4} sur ce calcul. L'erreur relative totale sur la valeur de $I(\kappa_{Ou}, \kappa_{Ov}^*)$ sera donc approximativement de 5×10^{-4} ; c'est-à-dire que nous aurons ainsi quatre chiffres significatifs.

Les autres termes contenus dans l'équation (5.24) de la déviation relative de fréquence $\delta f/f$ ne causent aucun problème, puisque les sous-routines pour les fonctions de Bessel et de Neumann sont déjà complétées. La double sommation de l'équation (5.24) est calculée dans la sous-routine CALCUL2, et l'énergie de la cavité W dans la sous-routine WCAVITE. Le calcul final de la déviation relative de fréquence (équation 5.24) est effectué dans la sous-routine TRANSFW.

Ainsi se terminent les étapes principales du calcul de la déviation de fréquence de résonance complexe due au tube d'insertion conducteur, par rapport à la cavité fermée.

5.3.2 Bouts conducteurs

Dans le chapitre III, nous avons déterminé les effets de la conductivité des parois de la cavité cylindrique. A partir des déviations de facteur de qualité dues aux parois conductrices (équations (3.26) et (3.32)), essayons d'obtenir l'expression pour le facteur de qualité de la cavité vide.

$$\frac{1}{Q_{\text{vide}}} = \frac{2}{(2\omega'_{\text{vide}} \mu \sigma_c)^{1/2}} \left(\frac{1}{R_3} + \frac{1}{h} \right) \quad (5.42)$$

où σ_c est la conductivité des parois de la cavité.

Nous utiliserons cette relation pour calculer la conductivité des parois de la cavité.

$$\sigma_c = \frac{(2Q_{\text{vide}})^2}{2\omega'_{\text{vide}} \mu} \left(\frac{1}{R_3} + \frac{1}{h} \right)^2 \quad (5.43)$$

Le circuit externe contribuant aussi au facteur de qualité de la cavité vide, la valeur de conductivité ainsi mesurée sera la conductivité efficace, c'est-à-dire la valeur de conductivité que semble avoir la cavité. En utilisant cette valeur de conductivité, on croit compenser pour les effets des conditions non idéales négligées (circuit externe, soudures de la cavité, etc.). La conductivité efficace a été

calculée dans la sous-routine INPUT.

Puisque maintenant nous connaissons la conductivité des parois, nous pouvons calculer la déviation du facteur de qualité produite par la conductivité des parois supérieure et inférieure de la cavité fermée.

$$\delta \left(\frac{1}{Q_{\text{cond.}}} \right) = \frac{1}{(2\omega' \mu_0 \sigma_c)^{1/2} h} \quad (5.44)$$

Ce calcul a été effectué dans la sous-routine TRANSF.

Ainsi s'achève le calcul de la déviation de fréquence complexe par rapport à la cavité fermée dotée de bouts parfaitement conducteurs.

5.4 Algorithme

L'algorithme du programme informatique, qui calcule la valeur précise de permittivité d'un échantillon à partir de la fréquence de résonance complexe d'une cavité conductrice ayant un tube d'insertion conducteur, est donné à la figure 5.2.

En voici les principales explications: au départ, on appelle la sous-routine INPUT, laquelle lit les entrées

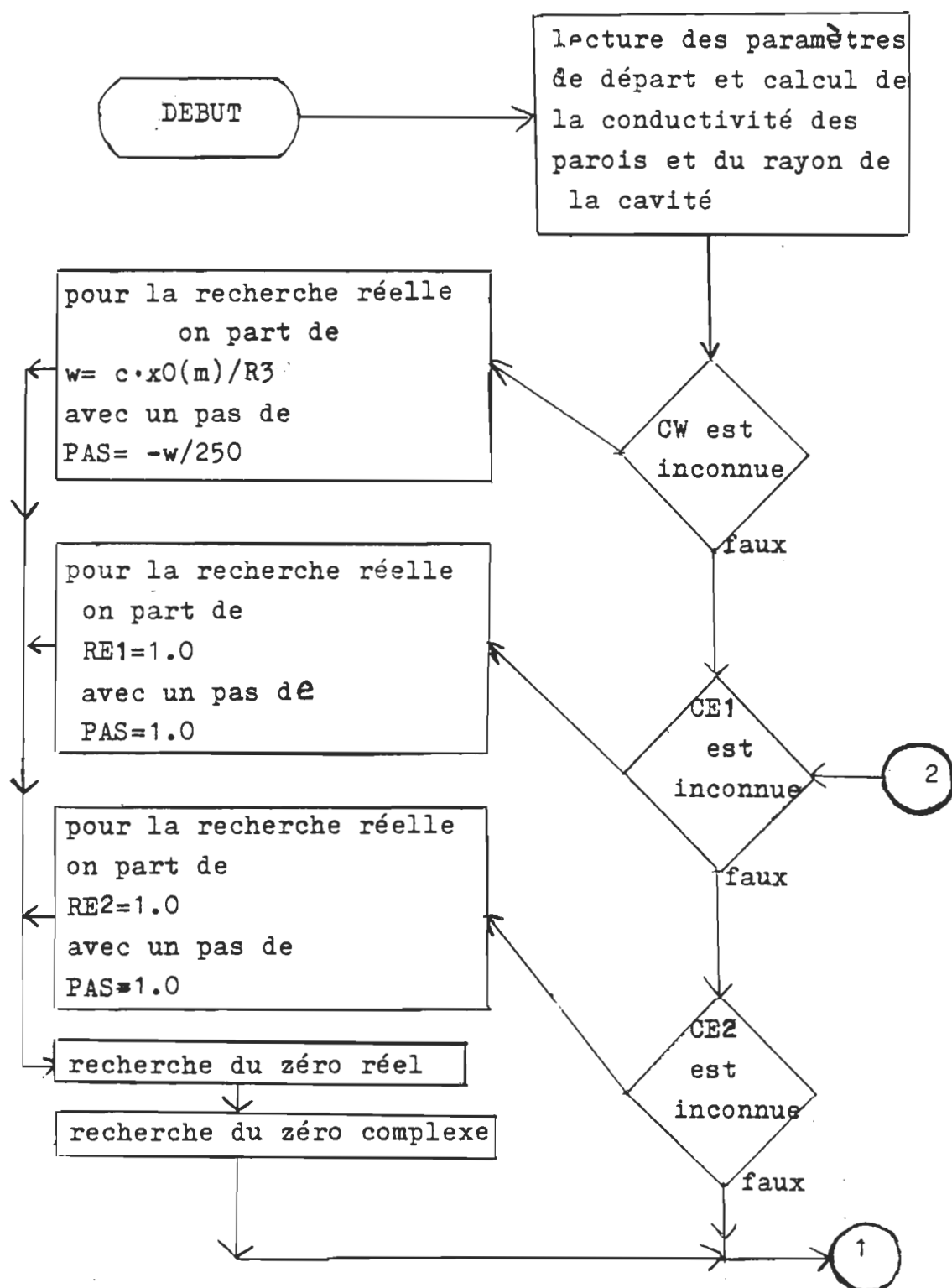
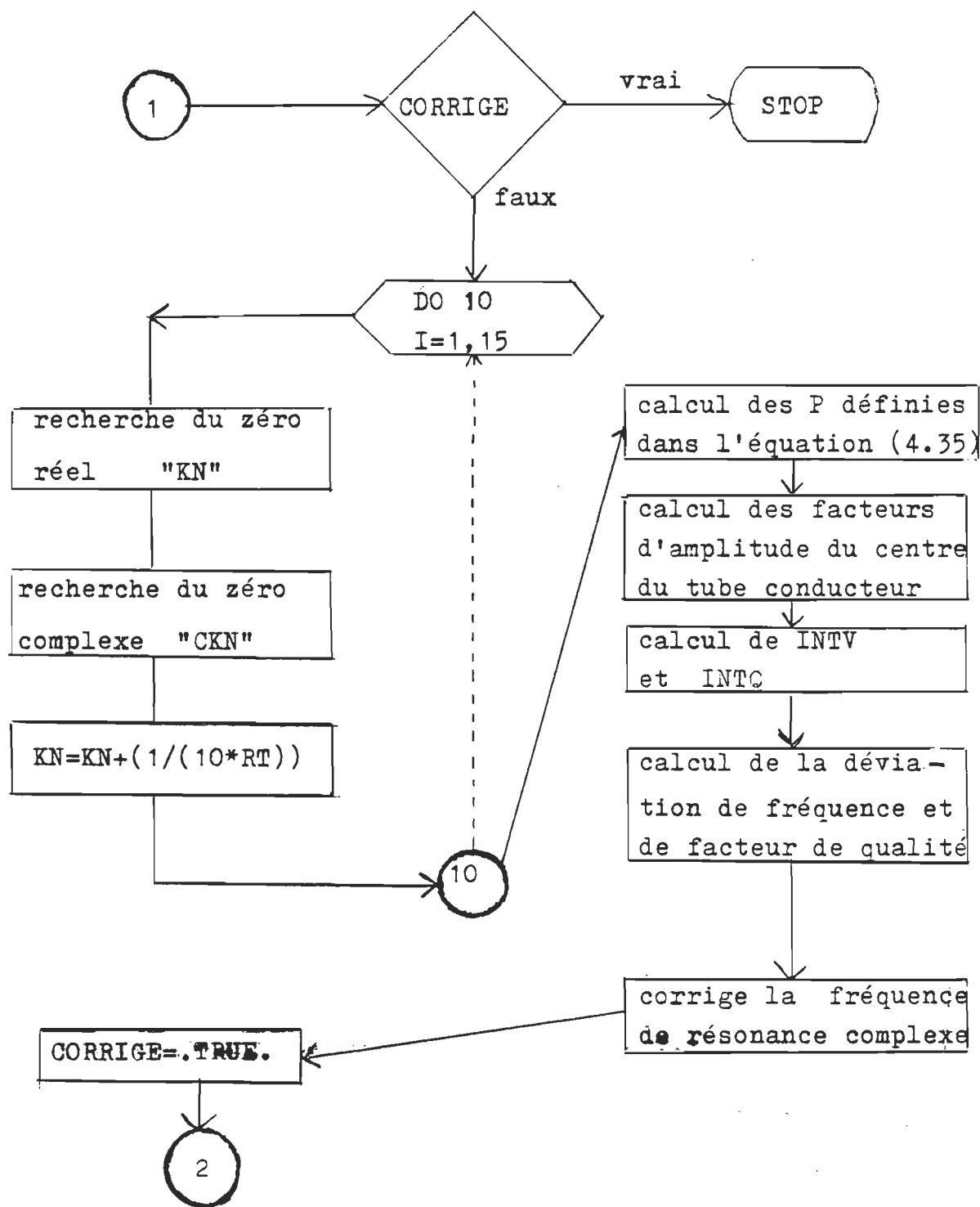


Figure 5.2 Algorithme (PERMI)



Algorithme (PERMI) (suite).

suivantes:

M: indice m du mode TM_{0m0} ;

H: hauteur de la cavité;

R1: rayon du milieu un;

R2: rayon du milieu deux;

RT: rayon du tube d'insertion conducteur;

FREVIDE: fréquence de la cavité vide;

QVIDE: facteur de qualité de la cavité vide;

SEEKCW: variable logique utilisée lorsque nous voulons
connaître la fréquence de résonance complexe de la
cavité;

SEEKCE1: variable logique utilisée lorsque nous voulons
connaître la permittivité du milieu un;

SEEKCE2: variable logique utilisée lorsque nous voulons
connaître la permittivité du milieu deux.

Selon la valeur de paramètres SEEK, les variables
suivantes pourront être nécessaires.

FRE, QMESUR: fréquence de résonance et facteur de qualité
mesurés par la cavité non idéale;

CE1: permittivité du milieu un;

CE2: permittivité du milieu deux.

La sous-routine INPUT calcule aussi le rayon R3 de la
cavité, de même que la conductivité SIGMA des parois

(équation 5.43) et la fréquence de résonance complexe (équation 1.17). Elle imprime, finalement toutes ces variables.

Pour calculer le rayon R_3 de la cavité, on s'est servi de la relation existant entre le rayon et la fréquence de résonance de la cavité idéale vide.

$$R_3 = \frac{c \cdot x_{0m}}{2\pi f_{\text{vide}}} \quad (5.45)$$

où

c : vitesse de la lumière;

x_{0m} : m ième zéro de la fonction de Bessel d'ordre zéro $J_0(x)$;

f_{vide} : fréquence de résonance de la cavité idéale vide.

En substituant, dans cette équation, la fréquence de résonance mesurée par la cavité conductrice vide et munie d'un tube d'insertion conducteur, on obtient une valeur approximative du rayon de la cavité R_{3A} . En substituant cette valeur dans l'équation (5.43), on obtient une valeur approximative Σ de la conductivité des parois. Utilisant ces deux valeurs approximatives, nous calculons la déviation relative de fréquence de la cavité vide due au tube d'insertion conducteur DVT,

$$\left(\frac{\delta f}{f} \right)_{\text{tube}} = \frac{4 R_T^3}{J_1^2(x_{01}) h R_3^2} \sum_{u=1}^{\infty} \frac{1}{x_{0u}^3} \quad (5.46)$$

$$= \frac{R_T^3}{h R_3^2} (1.2004039895...) \quad (5.47)$$

et à la conductivité des parois de la cavité DVC.

$$\left(\frac{\delta f}{f} \right)_{\text{cond.}} \approx \frac{-1}{(2\omega' \mu \sigma_C)^{1/2}} \frac{1}{R_3} \quad (5.47)$$

En obtenant la valeur de la fréquence de résonance de la cavité idéale vide, nous calculons la valeur du rayon efficace R_3 de la cavité (équation (5.45)). Finalement, substituant ce rayon dans l'équation (5.43), on obtient la valeur de la conductivité efficace SIGMA.

Maintenant que tous les paramètres de départ sont connus, nous pouvons passer à la résolution de l'équation caractéristique (5.4) de la cavité fermée ayant des bouts parfaitement conducteurs. Dans un premier temps, cette section de l'algorithme nous permettra d'obtenir une valeur approximative de la permittivité efficace ou de la fréquence de résonance complexe. A la fin du programme, nous retournerons à cette partie de l'algorithme pour obtenir la valeur précise de la permittivité du milieu un ou deux.

La résolution de l'équation caractéristique (5.4) a été expliquée à la section 5.2. En premier lieu, il fallait trouver le zéro réel par changement de signe, à l'aide de la sous-routine ZROREEL; ensuite, le zéro complexe que nous cherchions était trouvé par la méthode de Newton, à l'aide de la sous-routine ZROCOMP. Le zéro réel est celui de l'équation caractéristique dans laquelle tous les paramètres connus sont pris réels et la conductivité des parois est prise comme étant infinie.

L'étape suivante consiste à calculer la déviation de fréquence de résonance complexe par rapport à la cavité conductrice fermée munie de bouts parfaitement conducteurs. A la section 5.3, nous avons déjà expliqué les grandes lignes de ce calcul. Au départ, on trouve les 15 premiers nombres d'ondes de l'intérieur du tube conducteur en solutionnant l'équation caractéristique correspondante (5.15).

Dans la recherche des zéros complexe K_{0u} par la méthode de Newton, il est nécessaire de connaître la dérivée par rapport aux nombres d'ondes K_{0u} de l'équation caractéristique (5.15) de l'intérieur du tube conducteur. Cette fois-ci, au lieu d'utiliser la définition (5.14b) de la dérivée, nous l'avons calculée explicitement. L'équation caractéristique (5.15) est équivalente à l'équation suivante:

$$G(K_{0u}) = R_{0u}^{(3)} J_{0u}^3 + B_{0u}^{(3)} Y_{0u}^3 = 0 \quad (5.48)$$

où

$$R_{Ou}^{(3)} = R_{Ou}^{(2)} [1 + (\pi \kappa_{Ou} R_2 / 2) \gamma_{Ou2} J_{1u2} (\epsilon_2 - 1)] \\ + B_{Ou}^{(2)} [(\pi \kappa_{Ou} R_2 / 2) \gamma_{Ou2} \gamma_{1u2} (\epsilon_2 - 1)] \quad (5.49)$$

$$B_{Ou}^{(3)} = B_{Ou}^{(2)} [1 - (\pi \kappa_{Ou} R_2 / 2) J_{Ou2} \gamma_{1u2} (\epsilon_2 - 1)] \\ - R_{Ou}^{(2)} [(\pi \kappa_{Ou} R_2 / 2) J_{Ou2} J_{1u2} (\epsilon_2 - 1)] \quad (5.50)$$

$$R_{Ou}^{(2)} = [1 + (\pi \kappa_{Ou} R_1 / 2) \gamma_{Ou1} \gamma_{1u1} (\epsilon_1 / \epsilon_2 - 1)] \quad (5.51)$$

$$B_{Ou}^{(2)} = -[(\pi \kappa_{Ou} R_1 / 2) J_{Ou1} J_{1u1} (\epsilon_1 / \epsilon_2 - 1)] \quad (5.52)$$

La dérivée par rapport au nombre d'ondes κ_{Ou} est donc donnée par ceci:

$$\frac{dG(\kappa_{Ou})}{d\kappa_{Ou}} = -R_{Ou}^{(3)} R_3 J_{1u3} - B_{Ou}^{(3)} R_3 \gamma_{1u3} \\ + \frac{dR_{Ou}^{(3)}}{d\kappa_{Ou}} J_{Ou3} + \frac{dB_{Ou}^{(3)}}{d\kappa_{Ou}} \gamma_{Ou3} \quad (5.53)$$

où

$$\begin{aligned}
\frac{dR_{Ou}^{(3)}}{dk_{Ou}} &= \frac{dR_{Ou}^{(2)}}{dk_{Ou}} + \frac{\pi k_{Ou} R_2}{2} (\xi_2 - 1) \\
\left[Y_{Ou2} \left(\frac{dR_{Ou}^{(2)}}{dk_{Ou}} J^{1u2} + \frac{dB_{Ou}^{(2)}}{dk_{Ou}} Y^{1u2} \right) \right. \\
&+ R_2 \left([Y_{Ou2} J_{Ou2} - J^{1u2} Y^{1u2}] R_{Ou}^{(2)} \right. \\
&\quad \left. \left. - [(Y_{Ou2})^2 - (Y^{1u2})^2] B_{Ou}^{(2)} \right) \right] \quad (5.54)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{dB_{Ou}^{(3)}}{dk_{Ou}} &= \frac{dB_{Ou}^{(2)}}{dk_{Ou}} + \frac{\pi k_{Ou} R_2}{2} (\xi_2 - 1) \\
\left[-J_{Ou2} \left(\frac{dB_{Ou}^{(2)}}{dk_{Ou}} Y^{1u2} - \frac{dR_{Ou}^{(2)}}{dk_{Ou}} J^{1u2} \right) \right. \\
&- R_2 \left([J_{Ou2} Y_{Ou2} - J^{1u2} Y^{1u2}] B_{Ou}^{(2)} \right. \\
&\quad \left. \left. - [(J_{Ou2})^2 - (J^{1u2})^2] R_{Ou}^{(2)} \right) \right] \quad (5.55)
\end{aligned}$$

$$\frac{dR_{Ou}^{(2)}}{dk_{Ou}} = \left[\frac{\pi k_{Ou} R_1^2}{2} [J_{Ou2} Y_{Ou1} - Y^{1u1} J^{1u1}] \left(\frac{\xi_1}{\xi_2} - 1 \right) \right] \quad (5.56)$$

$$\frac{dB_{Ou}^{(2)}}{dk_{Ou}} = - \left[\frac{\pi k_{Ou} R_1^2}{2} [(J_{Ou1})^2 - (J^{1u1})^2] \left(\frac{\xi_1}{\xi_2} - 1 \right) \right] \quad (5.57)$$

Ces calculs n'apparaissent pas directement dans

l'algorithme, mais ils sont utilisés indirectement dans la recherche des zéros complexes lorsqu'on appelle sous-routine APPFKN, qui donne la valeur approximative de ces zéros par la méthode de Newton.

Après avoir trouvé les 15 premiers nombres d'ondes κ_{0u} de l'intérieur du tube conducteur, on calcule les combinaisons linéaires P_{0u}, P_{1u} de fonctions de Bessel et de Neumann définies à l'équation (4.35). Ceci est effectué dans la sous-routine BESABP. Ensuite, on calcule les facteurs d'amplitude $R_{0u}^{(1)}$ (appelés CN dans le programme) du centre du tube conducteur (équation (5.34)), ce qui est fait par la sous-routine COEFC.

La double sommation (appelée INTV dans le programme) qui apparaît dans l'expression de la déviation de fréquence due au tube conducteur (équation (5.24)), est calculée dans la sous-routine CALCUL2. L'intégrale (appelée INTQ dans le programme) apparaissant dans l'expression de la déviation du facteur de qualité due au tube conducteur (équation (5.29)), est calculée dans la sous-routine CALCUL1.

Dans la sous-routine TRANSF, on calcule d'abord la déviation de fréquence de résonance complexe (équation 5.3), par rapport à la cavité fermée ayant des bouts parfaitement conducteurs; ensuite, on transforme la fréquence de résonance

mesurée en celle d'une telle cavité.

A la fin du programme, on pose que la variable CORRIGE est vraie, car les corrections des conditions non idéales ont été effectuées. Finalement, nous retournons à la partie de l'algorithme où s'effectue la résolution de l'équation caractéristique (5.4) de la cavité fermée ayant des bouts parfaitement conducteurs, et nous obtenons alors la valeur précise de la permittivité du milieu un ou deux.

Ceci termine la théorie sur la partie informatique du calcul de la permittivité à partir de la fréquence de résonance complexe de la cavité conductrice ayant un tube d'insertion conducteur.

Une dernière remarque: pour comparer avec les ouvrages spécialisés, nous avons calculé les coefficients de correction C (équations (4.98)) et D (équation (4.101)) de la partie réelle et imaginaire de la mesure de permittivité, obtenus à l'aide de l'équation caractéristique approximative (4.90). Le programme principal, pour calculer ces coefficients de correction C et D, est donné à l'annexe D avec les commentaires appropriés.

CHAPITRE VI

DISCUSSION ET RESULTATS

6.1 Calcul approximatif

Le calcul approximatif de la permittivité d'un échantillon donné à partir de la fréquence de résonance complexe d'une cavité ayant un tube d'insertion conducteur peut s'effectuer à l'aide de deux équations différentes; l'équation caractéristique exacte (2.80) de la cavité idéale ou bien sa forme approximative, l'équation (4.90) (théorie des perturbations). L'erreur introduite sur la mesure de la permittivité dépend de l'équation utilisée; non pas parce que l'une est une forme approximative de l'autre, mais bien parce qu'elles sont fonctions de variables différentes.

Dans l'équation caractéristique exacte (2.80), lorsqu'on calcule la permittivité à partir de la fréquence de résonance de la cavité avec le tube d'insertion, la seule valeur erronée est cette valeur de fréquence (l'échantillon est à

l'intérieur). Dans l'équation caractéristique approximative (4.90), ce seront les fréquences de la cavité sans et avec l'échantillon qui seront erronées, produisant ainsi une erreur différente sur le calcul de la permittivité. Par contre, il faut s'attendre à ce qu'une fois corrigées, les valeurs de permittivité calculées soient approximativement les mêmes dans les deux cas. Les valeurs de permittivité corrigées sont celles obtenues de ces équations, lorsqu'on a transformé les fréquences de résonance mesurées en fréquences d'une cavité fermée. En examinant les résultats de ce chapitre, on verra que les corrections de permittivité sont effectivement différentes pour ces deux équations caractéristiques.

Dans la section 6.2, nous donnerons les corrections de permittivité (ou les coefficients C et D) dues au tube conducteur, qu'il faut effectuer lorsqu'on utilise une de ces deux équations caractéristiques. Puisque nous voulons seulement l'effet du tube d'insertion conducteur, nous poserons que la conductivité des parois est infinie. Dans la section 6.3, nous examinerons les effets produits par un espace vide se trouvant entre le tube capillaire diélectrique et le tube d'insertion conducteur; ensuite nous examinerons l'effet de la conductivité des parois.

Remarque: Les graphiques de ce chapitre (sauf les

graphiques 6.1 et 6.2) ont été tracés à l'aide de la procédure GRAPHE^[14] implantée dans l'ordinateur Cyber de l'université du Québec à Trois-Rivières. En général dans les ouvrages spécialisés lorsqu'apparaît un facteur de multiplication dans les tableaux ou les graphiques, il faut diviser les valeurs des tableaux ou des graphiques pour obtenir les valeurs réelles. Par contre, avec la procédure GRAPHE, il faut prendre la valeur du graphique et multiplier par le facteur de multiplication pour obtenir la valeur réelle. Par exemple, dans la figure 6.8, l'échelle du coefficient D varie entre 0.295 et 0.365.

6.2 Effets de bouts

6.2.1 Equation caractéristique approximative

L'équation caractéristique approximative (4.90) a déjà été traitée dans des ouvrages spécialisés, en particulier dans l'article de Li et Bosisio^[4] (1981). D'ailleurs, nous nous sommes principalement inspirés de cet article pour le traitement théorique des effets de bouts.

Dans les figures 6.1 et 6.2, nous voyons les coefficients de corrections C et D, définis dans les équations (4.100) et (4.97) obtenues par les auteurs de l'article. Dans les figures 6.3 et 6.4, nous donnons les résultats obtenus par

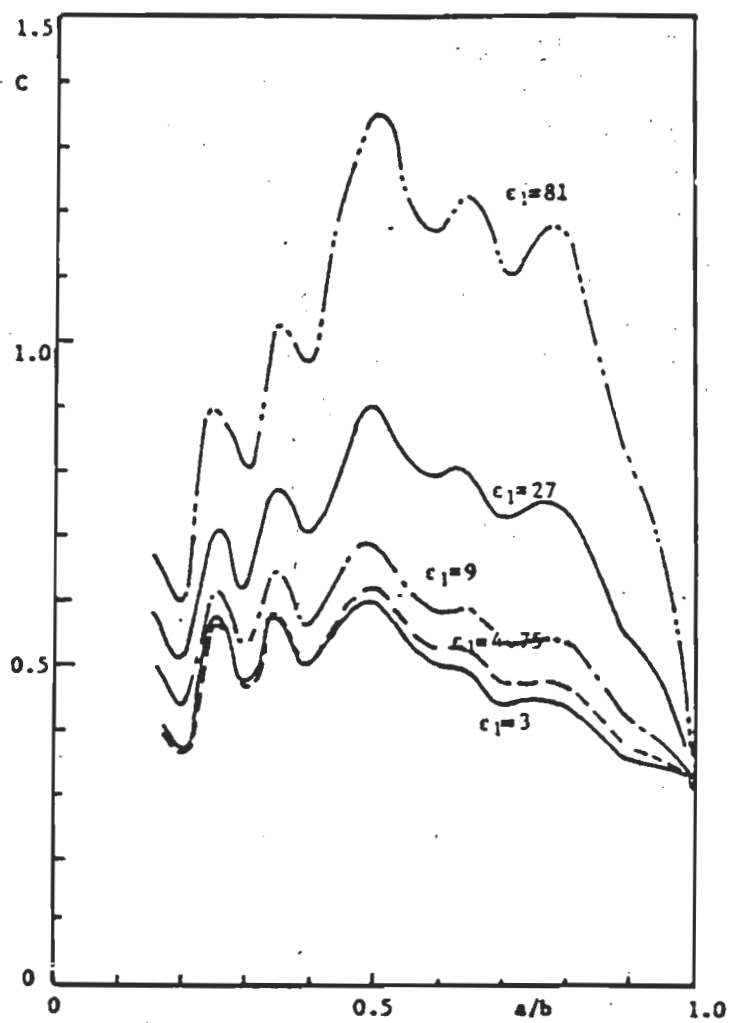


Figure 6.1 C en fonction de R_1/RT (Li et Bosisio).

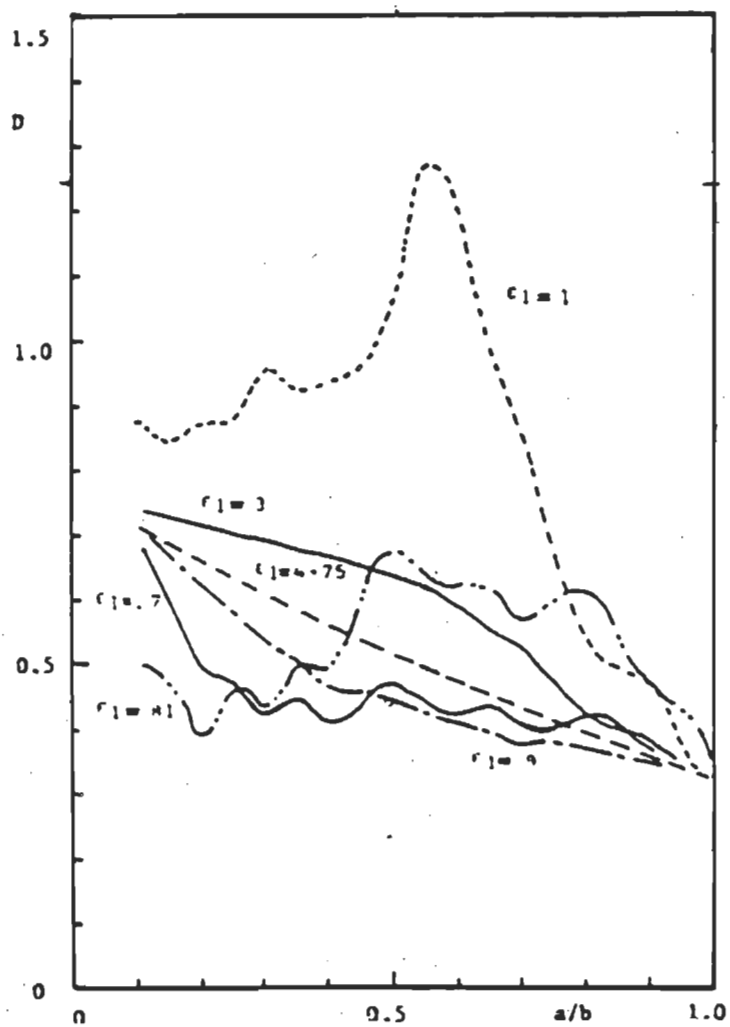


Figure 6.2 D en fonction de R_1/RT (Li et Bosisio).

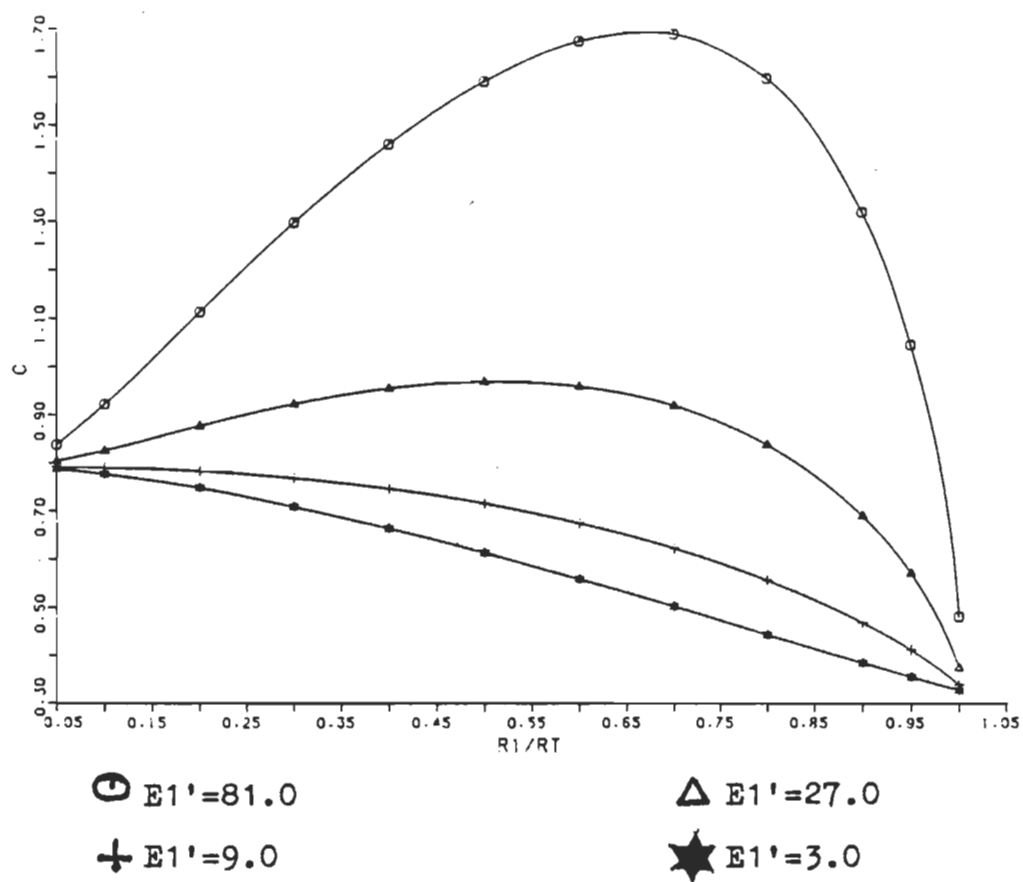
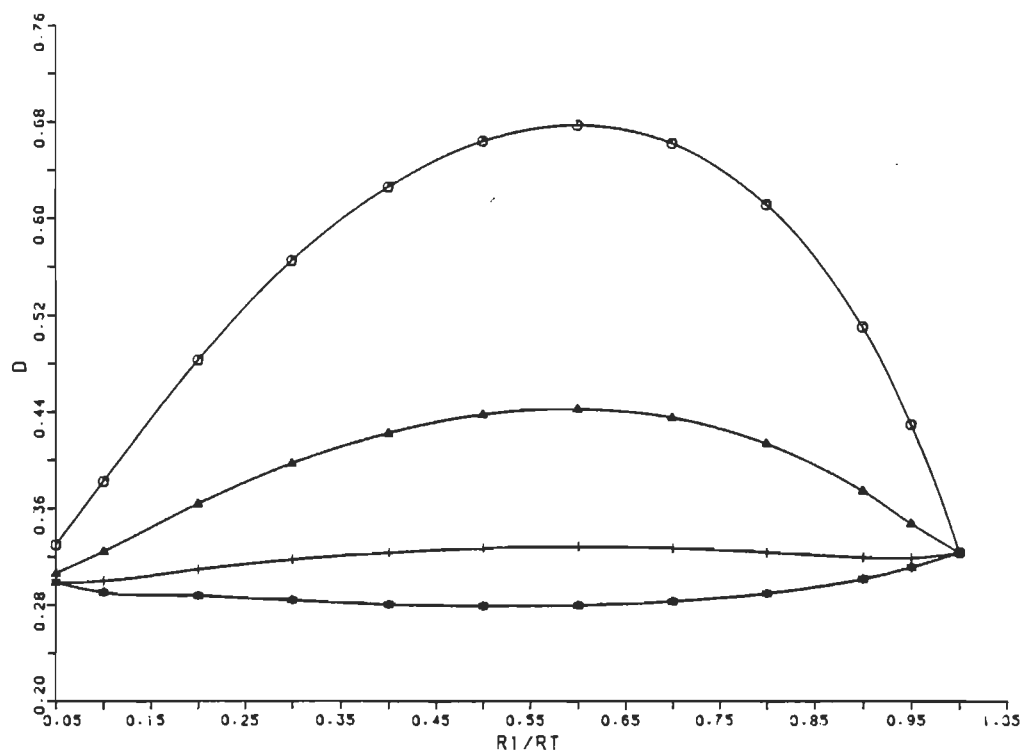


Figure 6.3 C en fonction de $R1/RT$. Cas réel.



○ $E1'=81.0$

△ $E1'=27.0$

+ $E1'=9.0$

★ $E1'=3.0$

Figure 6.4 D en fonction de $R1/RT$. Cas réel.

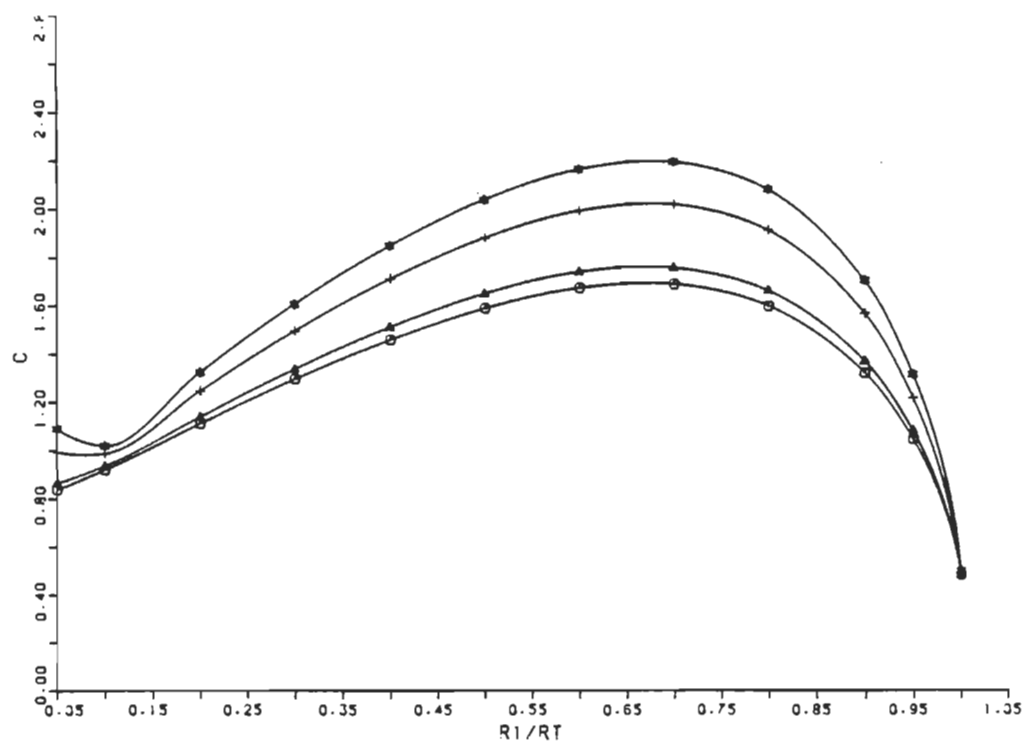
nos propres calculs. Nos courbes de coefficient C ont des valeurs un peu supérieures aux leurs; de plus, elle sont beaucoup plus uniformes (régulières). Dans les deux cas, on remarque que les coefficients de corrections C augmentent lorsque la permittivité réelle augmente. Qui plus est, les courbes convergent vers le point $C=0.323$ lorsque le rapport R_1/R_T tend vers un.

Les courbes des coefficients de corrections D de nos calculs sont très différentes de celles de Li et Bosisio. De nos courbes, on peut conclure que le coefficient de correction D augmente à mesure qu'augmente la permittivité réelle du milieu un; cela semble logique puisque habituellement, la concentration des lignes de champs électriques est plus grande dans des régions de permittivité élevée, ce qui produit ainsi plus de pertes diélectriques. Des courbes de Li et Bosisio, nous ne pouvons à peu près rien conclure sur le comportement du coefficient de correction D .

Remarque: Pour les figures 6.1 à 6.17, le rayon extérieur du milieu deux R_2 est égal au rayon du tube d'insertion conducteur R_T , c'est-à-dire, nous avons seulement considéré le cas où il y a deux diélectriques dans le tube conducteur.

La différence entre notre traitement et celui de Li et Bosisio se trouve dans la façon de déterminer la distribution des champs de l'intérieur du tube conducteur. Dans ce travail, on a calculé les facteurs d'amplitude A_{0u} et B_{0u} de cette distribution en utilisant les propriétés d'orthogonalité des champs considérés (section 4.2.4). Li et Bosisio, eux, ont utilisé la méthode de Galerkin^{[4],[15]}, qui oblige à résoudre N équations à N inconnues (ou N doit être grand). De plus, nous avons complètement tenu compte du caractère complexe des champs.

La comparaison avec les ouvrages spécialisés se termine ici, puisque les autres effets que nous allons examiner n'ont, à notre connaissance, pas encore été traités. Les figures 6.5 à 6.8 montrent l'effet de la permittivité imaginaire du milieu un sur les coefficients de correction C et D , pour une permittivité réelle égale à 81.0 et 9.0 respectivement. On remarque que les coefficients de corrections C et D augmentent quelque peu, à mesure que la permittivité imaginaire augmente, sauf pour les points de convergence qui restent les mêmes. Pour des permittivités imaginaires raisonnables par rapport à la réalité, c'est-à-dire, $\epsilon''_1 \approx 10.0$ pour $\epsilon'_1 = 81.0$ et $\epsilon''_1 \approx 4.0$ pour $\epsilon'_1 = 9.0$, on s'attend approximativement à des augmentations maximums de quelques pour cent.



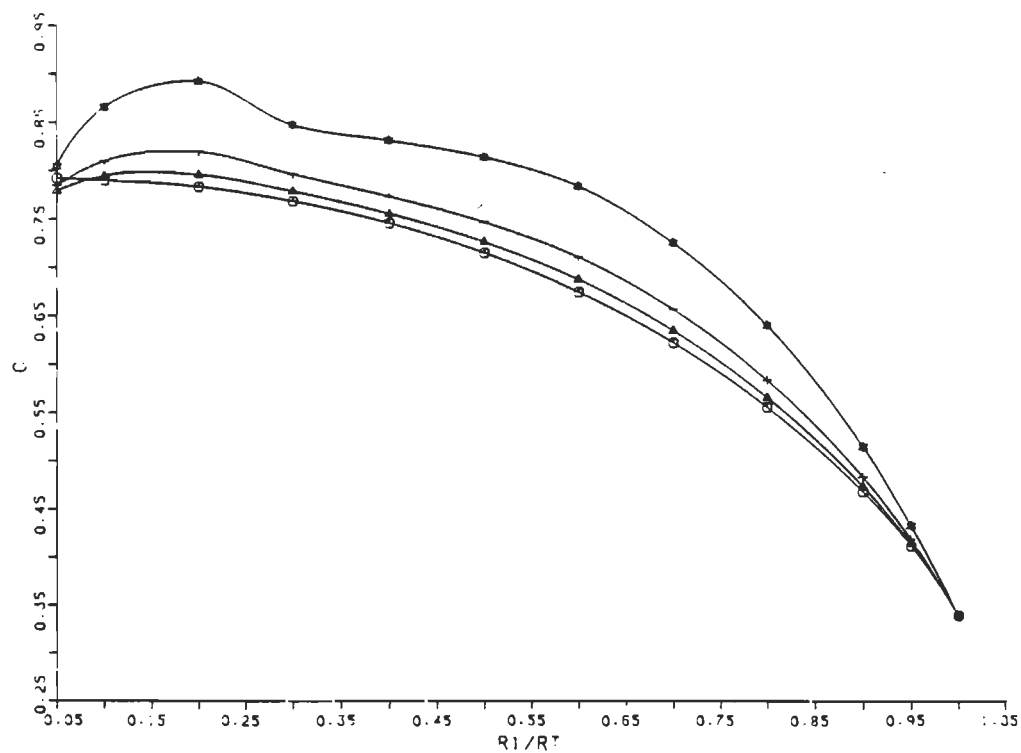
○ $E1''=0.0$

△ $E1''=27.0$

+ $E1''=63.0$

★ $E1''=81.0$

Figure 6.5 C en fonction de $R1/RT$. Cas complexe ($E1'=81.0$).



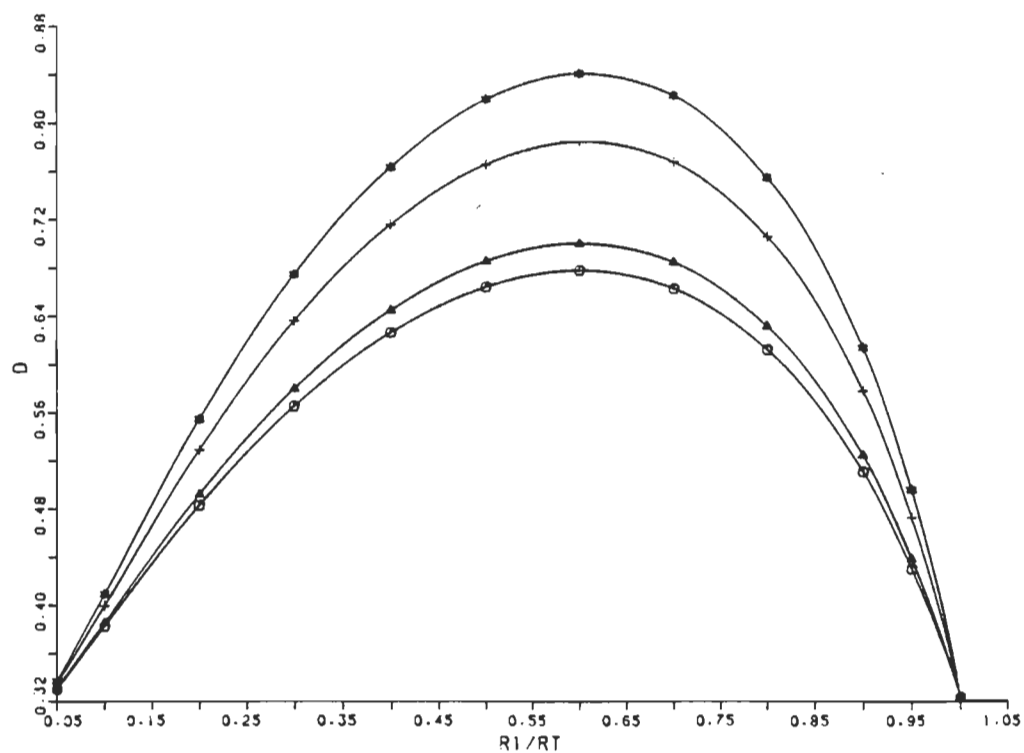
○ $E1''=0.0$

△ $E1''=3.0$

+ $E1''=5.0$

★ $E1''=9.0$

Figure 6.6 C en fonction de $R1/RT$. Cas complexe ($E1'=9.0$).



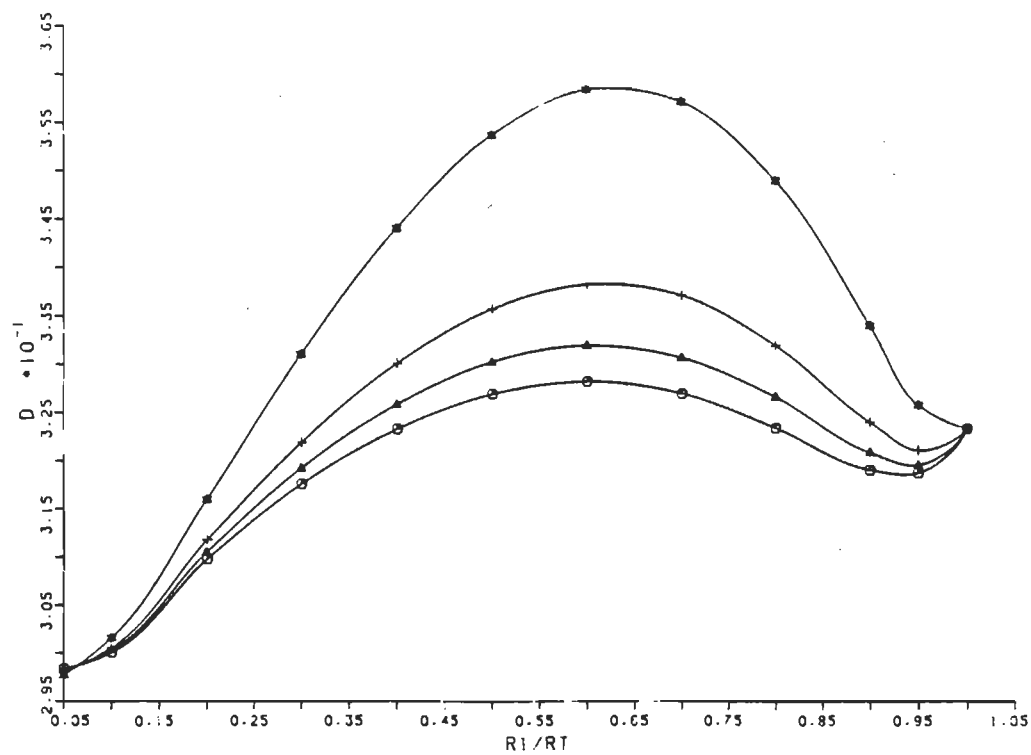
○ $E1''=0.0$

△ $E1''=27.0$

+ $E1''=63.0$

★ $E1''=81.0$

Figure 6.7 D en fonction de $R1/RT$. Cas complexe ($E1'=81.0$).



○ $E_1'' = 0.0$

△ $E_1'' = 3.0$

⊕ $E_1'' = 5.0$

★ $E_1'' = 9.0$

Figure 6.8 D en fonction de R_1/RT . Cas complexe ($E_1' = 9.0$).

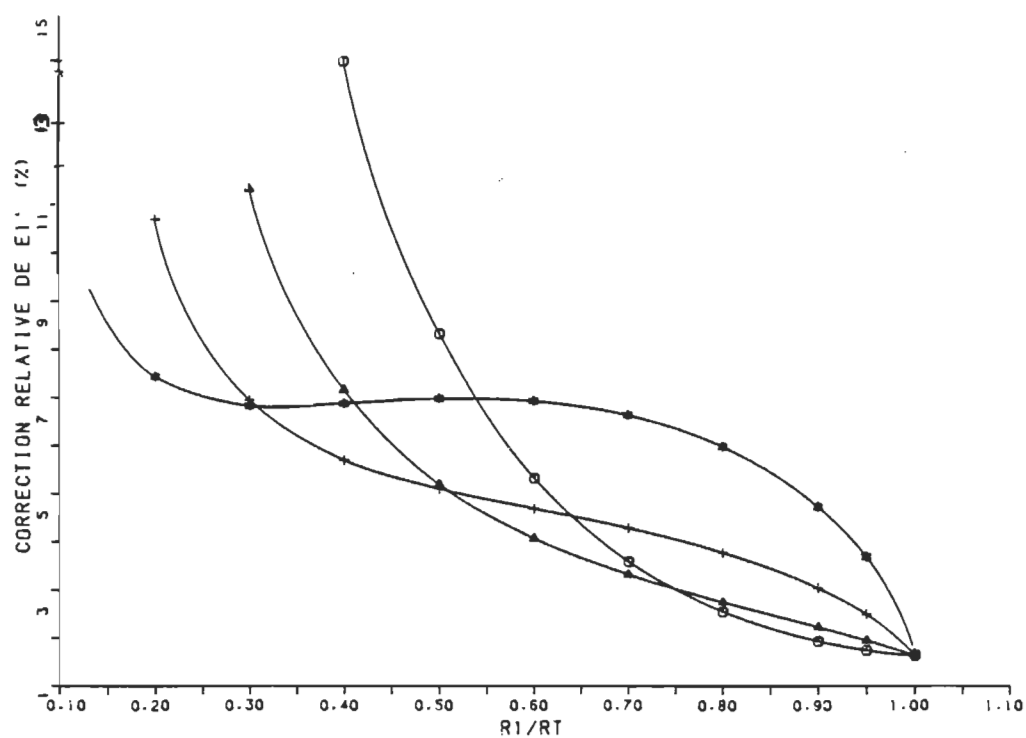
6.2.2 Equation caractéristique exacte

Pour l'équation caractéristique exacte, nous avons calculé les corrections relatives de permittivité réelle (imaginaire) en pourcentage. La cavité considérée a une fréquence de résonance vide de 2.2389 GHz, une hauteur de 40 mm et une conductivité infinie. Dans la figure 6.9, nous donnons les corrections relatives de permittivité du milieu un pour le cas où les permittivités sont seulement réelles. Lorsque le rayon du milieu un tend vers zéro, on remarque que les corrections relatives de la permittivité réelle tendent vers l'infini.

Dans l'équation caractéristique exacte,

$$F(\epsilon_1, \epsilon_2, \omega) = 0 \quad (6.1)$$

la permittivité du milieu deux est précisément connue (pour le cas considéré); par conséquent, l'erreur sur le calcul de la permittivité réelle du milieu un provient entièrement de la déviation de fréquence de résonance complexe par rapport à la cavité idéale. Lorsque le rayon du milieu un tend vers zéro, la déviation de la fréquence de résonance par rapport à la cavité idéale tend vers une constante, celle d'une cavité ayant un tube conducteur rempli d'un matériau de permittivité ϵ_2 . Pour une même permittivité réelle, plus l'échantillon



○ $E1' = 3.0$

△ $E1' = 9.0$

+ $E1' = 27.0$

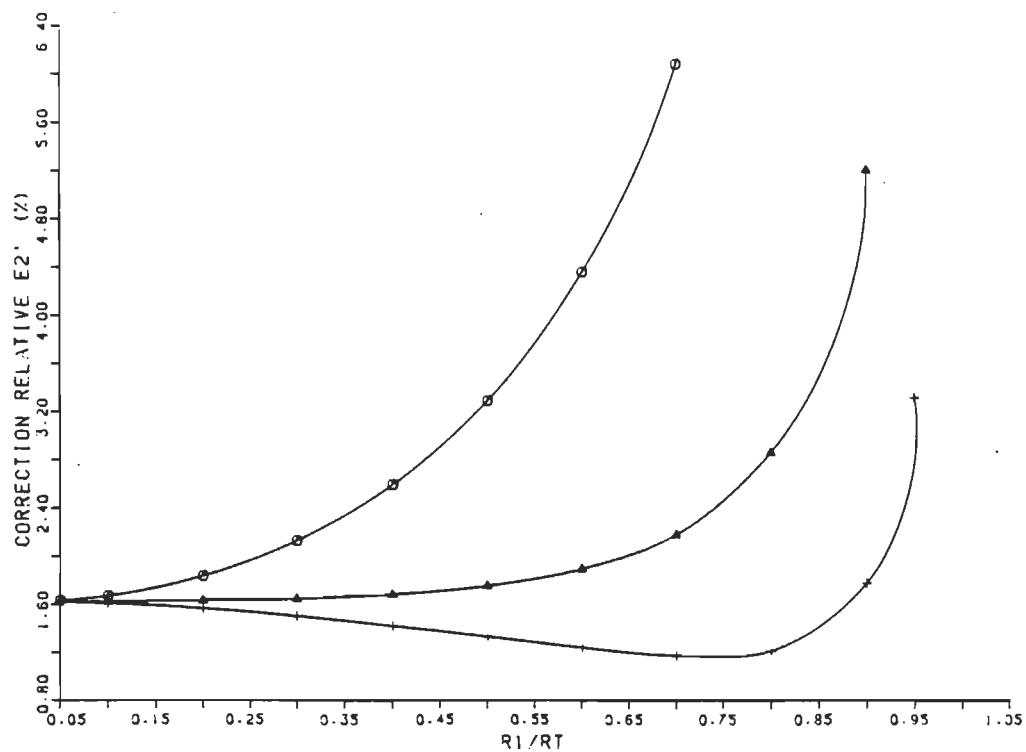
★ $E1' = 81.0$

Figure 6.9 Correction relative de $E1'$ en fonction de $R1/RT$. Cas réel.

est petit, plus la déviation de fréquence qu'il produit sera petite. Par un cheminement inverse, on conclut donc que la déviation constante de fréquence de résonance par rapport à la cavité idéale (lorsque R_1 tend vers zéro) produira des corrections de permittivité réelle de plus en plus grandes, comme on l'a déjà constaté dans la figure 6.9. Cet effet est plus marqué lorsque le rapport de la permittivité réelle du milieu deux sur celle du milieu un est plus grand; car dans ce cas la déviation de fréquence de résonance provient principalement du milieu deux.

Si, au lieu de corriger la permittivité réelle du milieu un, on corrige celle du milieu deux, on s'attend à ce que les corrections relatives de permittivité du milieu deux tendent vers l'infini lorsque le milieu deux tend à disparaître ($R_1 \rightarrow R_T$); c'est ce que l'on constate effectivement à la figure 6.10. Evidemment, cet effet est plus marqué lorsque la permittivité du milieu un est plus grande, car alors la déviation de fréquence de résonance est plus élevée lorsque le milieu deux tend à disparaître.

Dans le but de connaître la différence des corrections de la permittivité réelle pour les deux équations caractéristiques, nous avons calculé, à la figure 6.11, ces corrections pour l'équation caractéristique approximative. En comparant les figures 6.11 et 6.9, on remarque que les

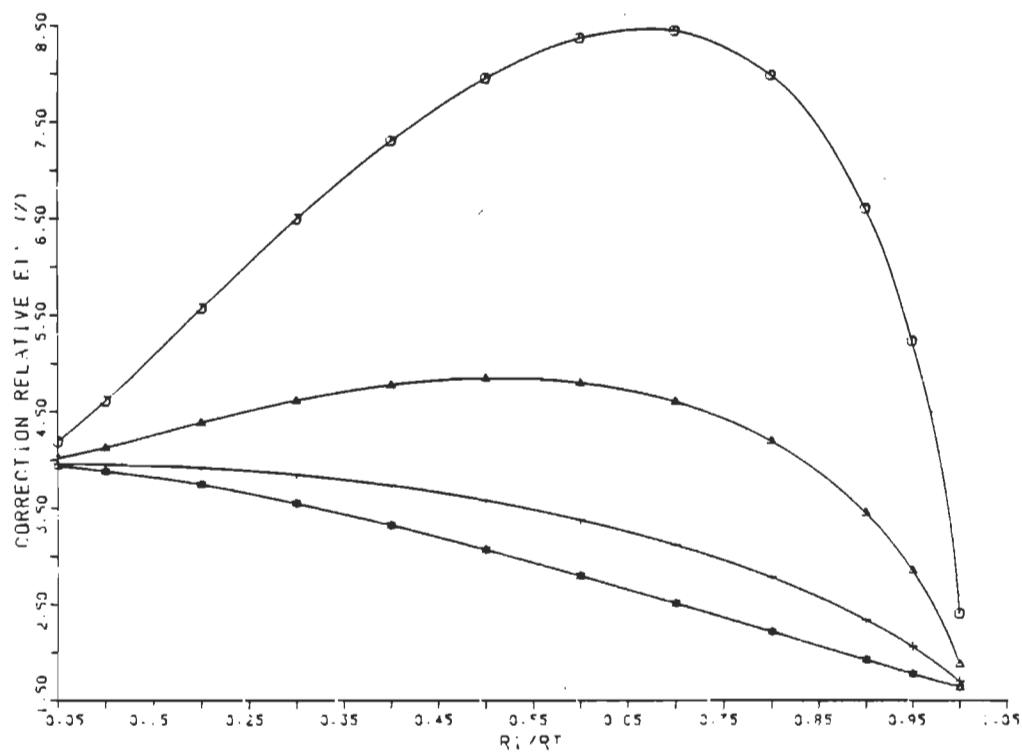


○ $E1' = 9.0$

△ $E1' = 3.0$

+ $E1' = 1.0$

Figure 6.10 Correction relative de $E2'$ en fonction de $R1/RT$. Cas réel ($E2' = 4.75$).



○ $E1' = 81.0$

△ $E1' = 27.0$

+ $E1' = 9.0$

★ $E1' = 3.0$

Figure 6.11 Correction relative de $E1'$ en fonction de $R1/RT$. Cas réel (équation caractéristique approximative)

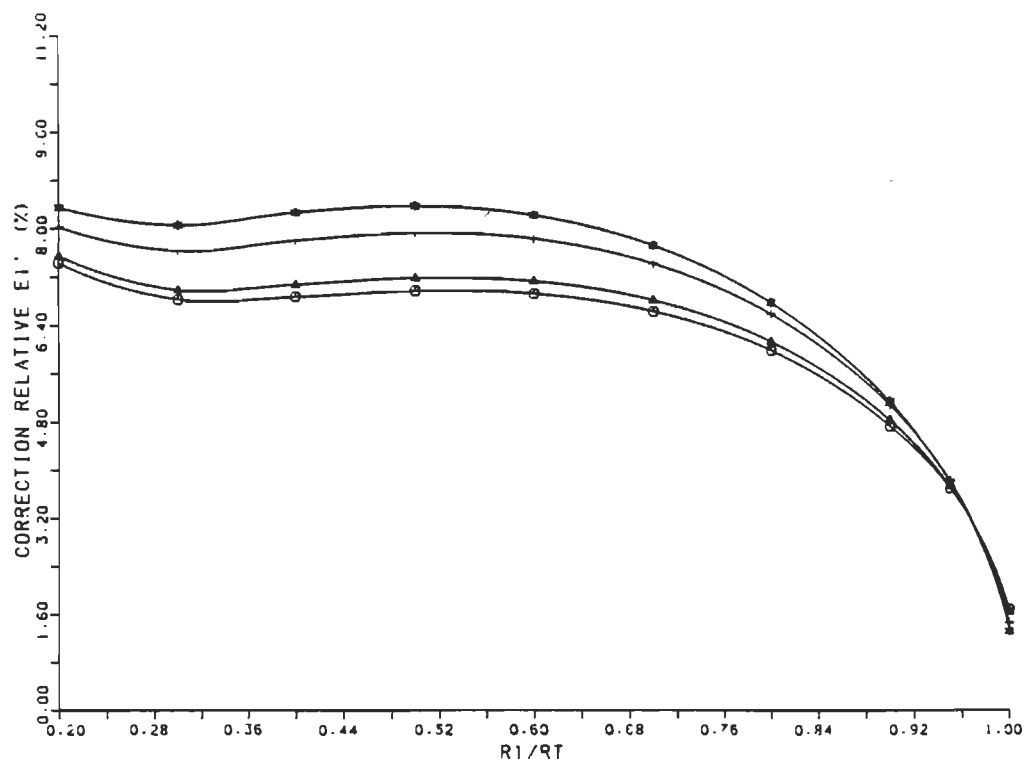
corrections de permittivité réelle sont d'autant plus différentes que le rapport des rayons R_1/R_T est petit. Autre fait intéressant: lorsque le rapport R_1/R_T est petit, la correction de la permittivité réelle, dans le cas de l'équation caractéristique exacte, est d'autant plus petite que la permittivité du milieu un est élevée contrairement à ce qui se produit pour l'équation caractéristique approximative.

Dans les figures 6.12 à 6.15, on montre l'effet de la permittivité imaginaire ϵ''_1 du milieu un sur les corrections relatives de la permittivité du milieu un. On s'aperçoit que celle-ci a pour effet d'augmenter quelque peu les corrections de permittivité. Pour des valeurs raisonnables de permittivité par rapport à la réalité, c'est-à-dire $\epsilon''_1 \approx 10.0$ pour $\epsilon'_1 = 81.0$ et $\epsilon''_1 \approx 4.0$ pour $\epsilon'_1 = 9.0$, on s'attend à des augmentations maximum de corrections relatives de permittivité ϵ' , ϵ'' de quelques pour cent. Il n'y a rien à ajouter sur les courbes de corrections relatives de la permittivité réelle; par contre, pour les courbes de corrections relatives de la permittivité imaginaire, on obtient approximativement les mêmes résultats que pour l'équation caractéristique approximative (figure 6.16 et 6.17), à cette différence près que l'équation caractéristique exacte donne des corrections relatives quelques peu supérieures.

Dans ces calculs, on a supposé que les seules pertes diélectriques étaient produites dans le milieu un. Par conséquent, l'erreur sur la permittivité imaginaire est proportionnelle aux pertes diélectriques causées par la partie du milieu un qui se trouve dans le tube conducteur; ceci vaut pour les deux équations caractéristiques. Cela explique aussi pourquoi on a obtenu des courbes de corrections de permittivité imaginaire si semblables.

6.3 Rayon du tube conducteur et conductivité.

Il arrive parfois qu'un espace se trouve entre le tube capillaire diélectrique et le tube d'insertion conducteur. Nous allons maintenant examiner l'effet de cet espace sur les corrections de permittivité. Pour ce faire, nous ferons varier le rayon du tube d'insertion conducteur R_T , et on choisit arbitrairement de prendre le rayon du milieu R_1 un égal à 0.6mm ainsi que le rayon du milieu deux R_2 égal à 1.0mm. On constate, à partir des figures 6.18 et 6.19, que les corrections relatives de permittivité augmentent lorsqu'il y a un espace vide entre le tube capillaire diélectrique et le tube d'insertion conducteur. Ces augmentations de corrections relatives de permittivité sont assez importantes, même pour des rapports de rayon R_T/R_2 quelque peu supérieurs à un. On obtient des



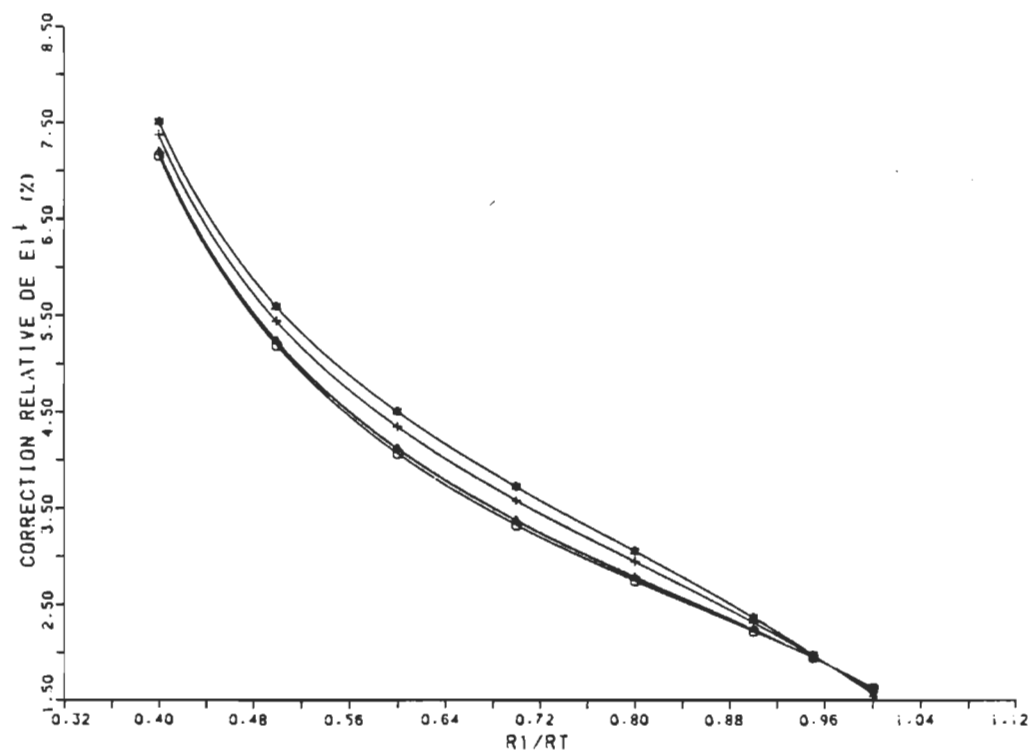
○ $E1'' = 0.0$

▲ $E1'' = 27.0$

+ $E1'' = 63.0$

★ $E1'' = 81.0$

Figure 6.12 Correction relative de $E1'$ en fonction de $R1/RT$. Cas complexe ($E1' = 81.0$).



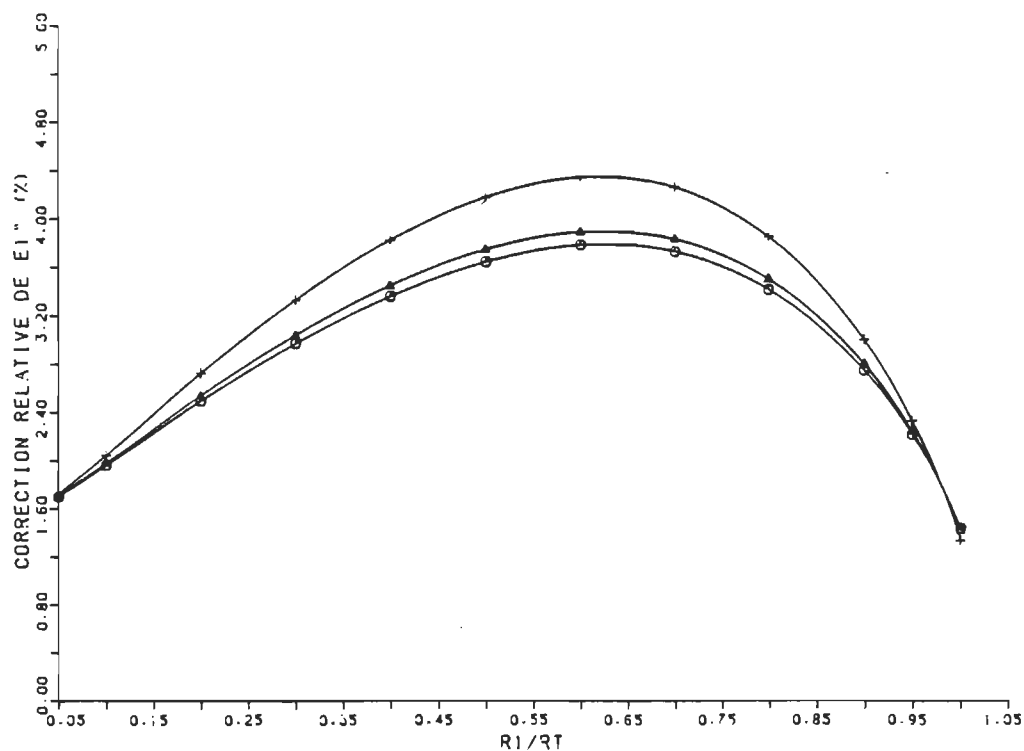
○ $E1'' = 1.0$

△ $E1'' = 3.0$

+ $E1'' = 7.0$

★ $E1'' = 9.0$

Figure 6.13 Correction relative de $E1'$ en fonction de $R1/RT$. Cas complexe ($E1' = 9.0$).

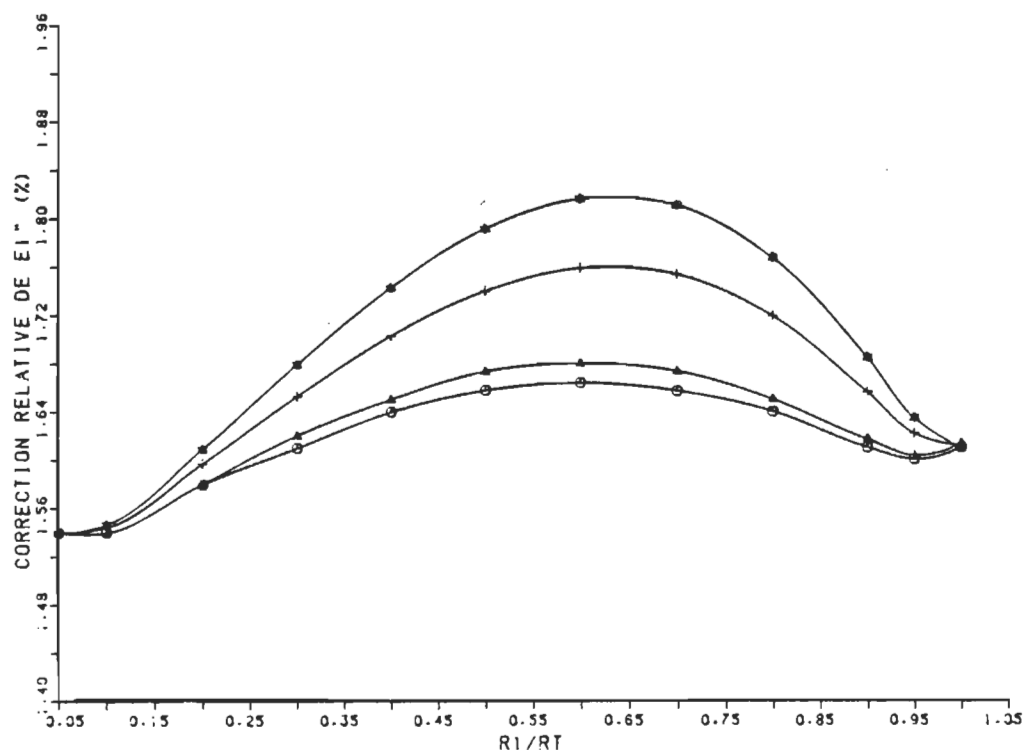


\odot $E1''=27.0$

Δ $E1''=63.0$

$+$ $E1''=81.0$

Figure 6.14 Correction relative de $E1''$ en fonction de $R1/RT$. Cas complexe ($E1'=81.0$).



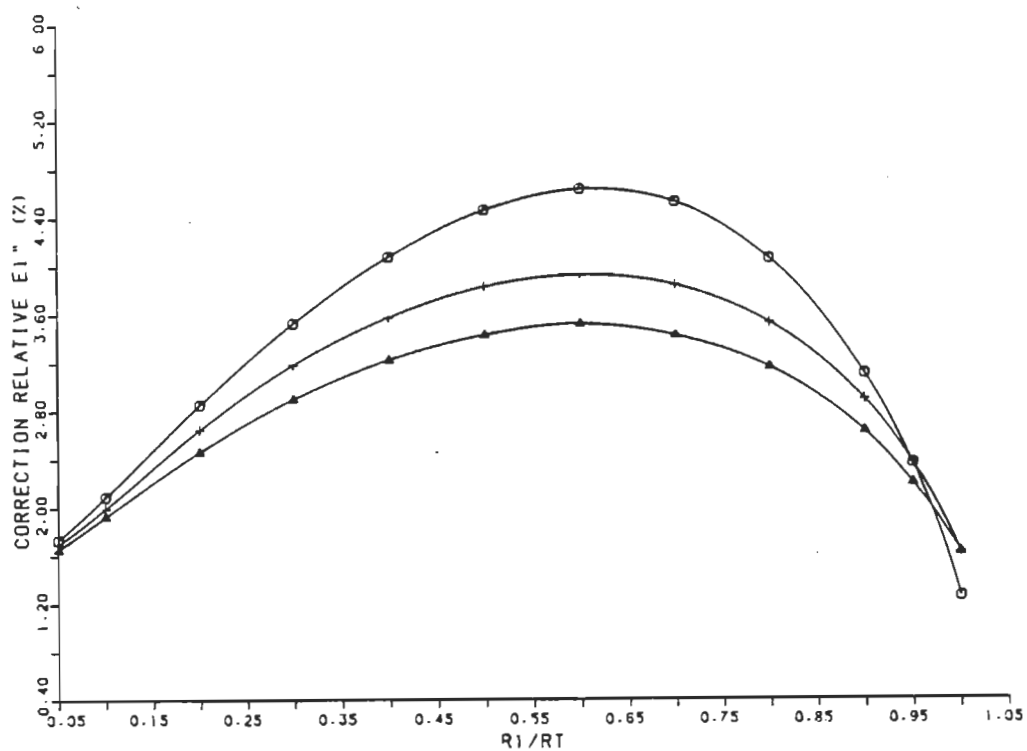
○ E1''=1.0

△ E1''=3.0

+ E1''=7.0

★ E1''=9.0

Figure 6.15 Correction relative de E1'' en fonction de R1/RT. Cas complexe (E1'=9.0).

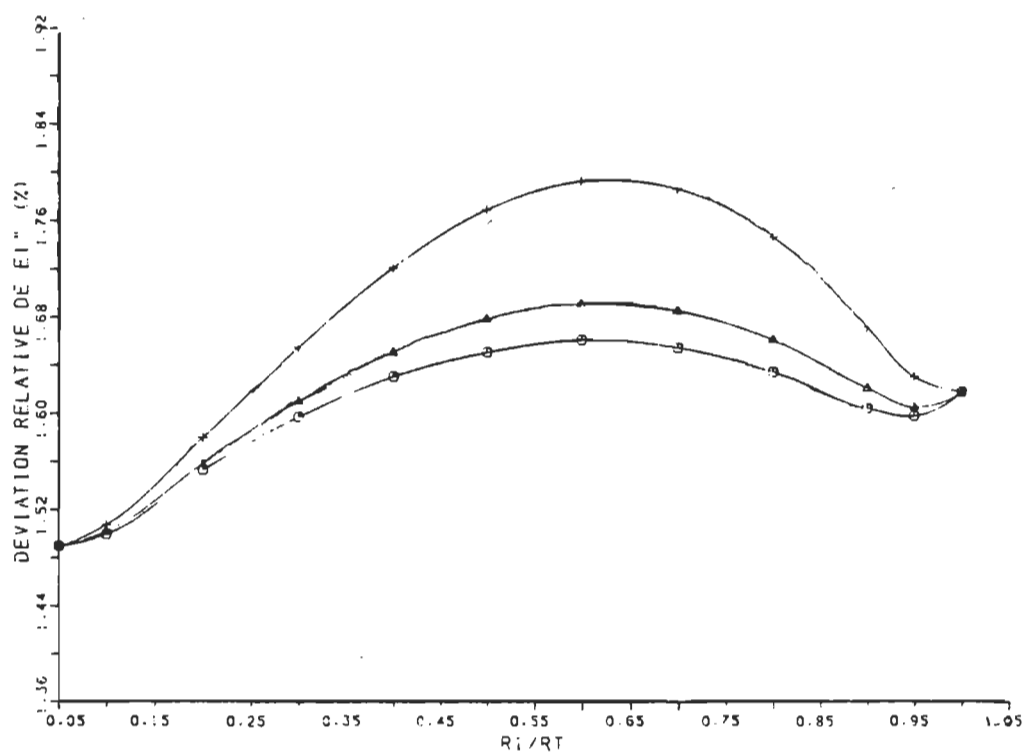


\bigcirc $E1'' = 27.0$

Δ $E1'' = 63.0$

$+$ $E1'' = 81.0$

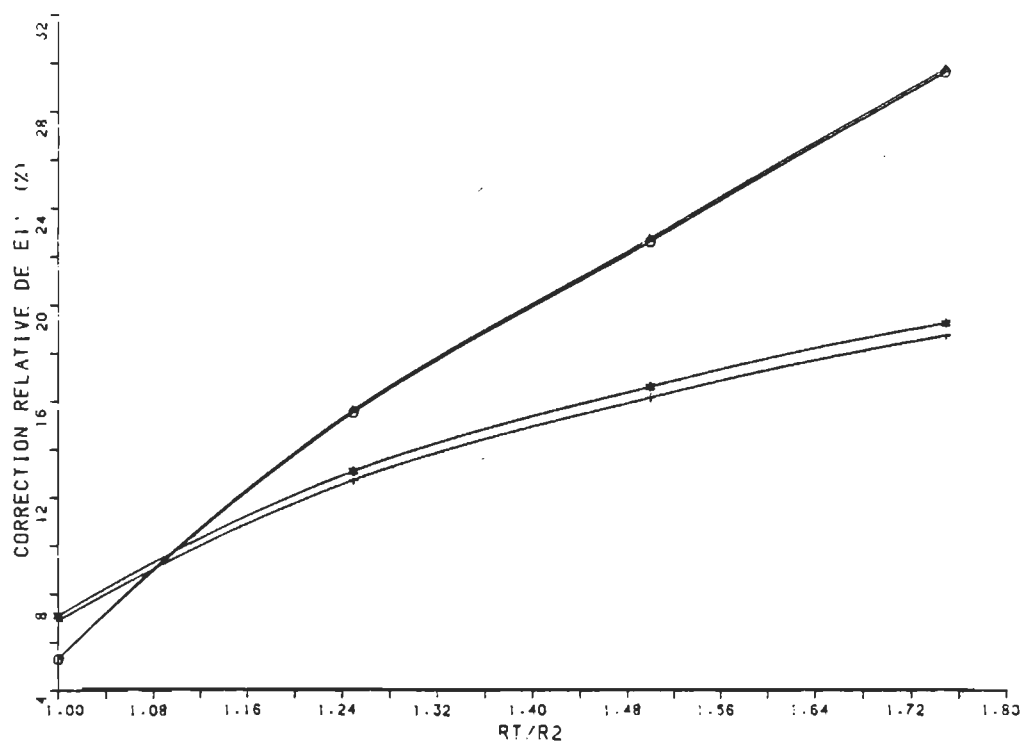
Figure 6.16 Correction relative de $E1''$ en fonction de $R1/RT$. Cas complexe ($E1' = 81$, équation approximative).



○ $E1'' = 3.0$
 + $E1'' = 9.0$

△ $E1'' = 5.0$

Figure 6.17 Correction relative de $E1''$ en fonction de $R1/RT$. Cas complexe (équation caractéristique approximative).



○ $E1'=3.0$ $E1''=0.0$ △ $E1'=3.0$ $E1''=1.5$
 + $E1'=81.0$ $E1''=0.0$ ★ $E1'=81.0$ $E1''=27.0$

Figure 6.18 Correction relative de $E1'$ en fonction de $RT/R2$. RT variable.

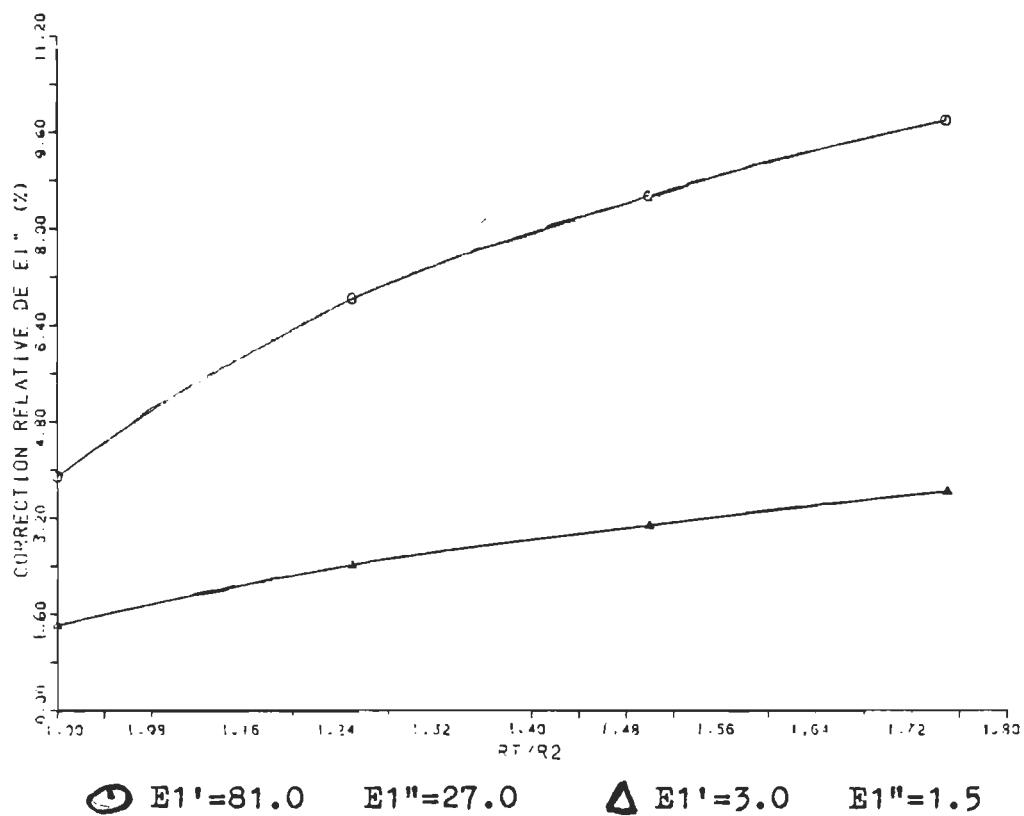


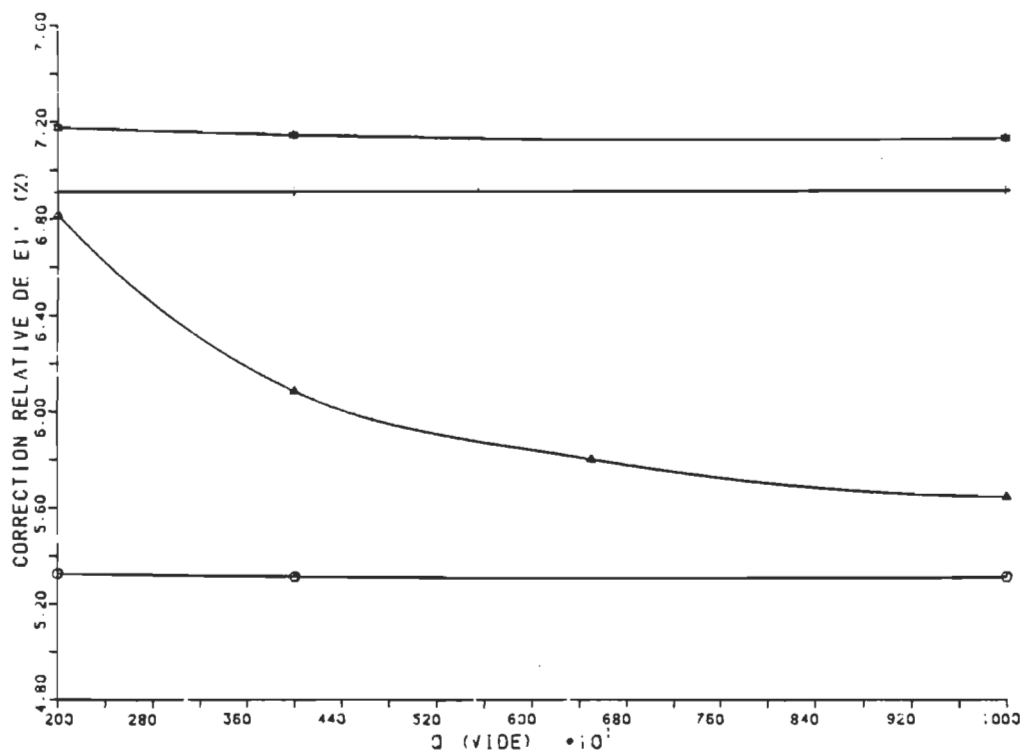
Figure 6.19 Correction relative de $E1''$ en fonction de $RT/R2$. RT variable.

résultats similaires pour les coefficients de corrections C et D de l'équation caractéristique approximative.

Ces corrections ont été calculées dans l'hypothèse où les matériaux à l'intérieur du tube conducteur sont bien centrés et alignés au centre de celui-ci. Expérimentalement, il est douteux qu'il en soit ainsi; il pourrait donc arriver dans ce cas que les corrections qu'on a calculées soient trop élevées.

Il nous reste un dernier cas à examiner indirectement: la conductivité des parois. Pour ce faire, nous ferons varier le facteur de qualité de la cavité vide, et on choisit arbitrairement de prendre le rayon du milieu un R_1 égal à 0.6mm, le rayon du milieu deux R_2 et le rayon du tube conducteur R_T égaux à 1.0mm.

Lorsque la permittivité du milieu un est complètement réelle, on remarque (figure 6.20) que la conductivité des parois via le facteur de qualité de la cavité vide a peu d'effet (inférieur à 0.1 pour cent) sur les corrections relatives réelles. Par contre, lorsque la permittivité du milieu un a une composante complexe, les corrections relatives de la partie réelle sont plus élevées quand le facteur de qualité diminue. La courbe $\epsilon_1' = 81.0$, $\epsilon_1'' = 27.0$ tend aussi vers l'infini, quand Q_{vide} tend vers zéro, tout



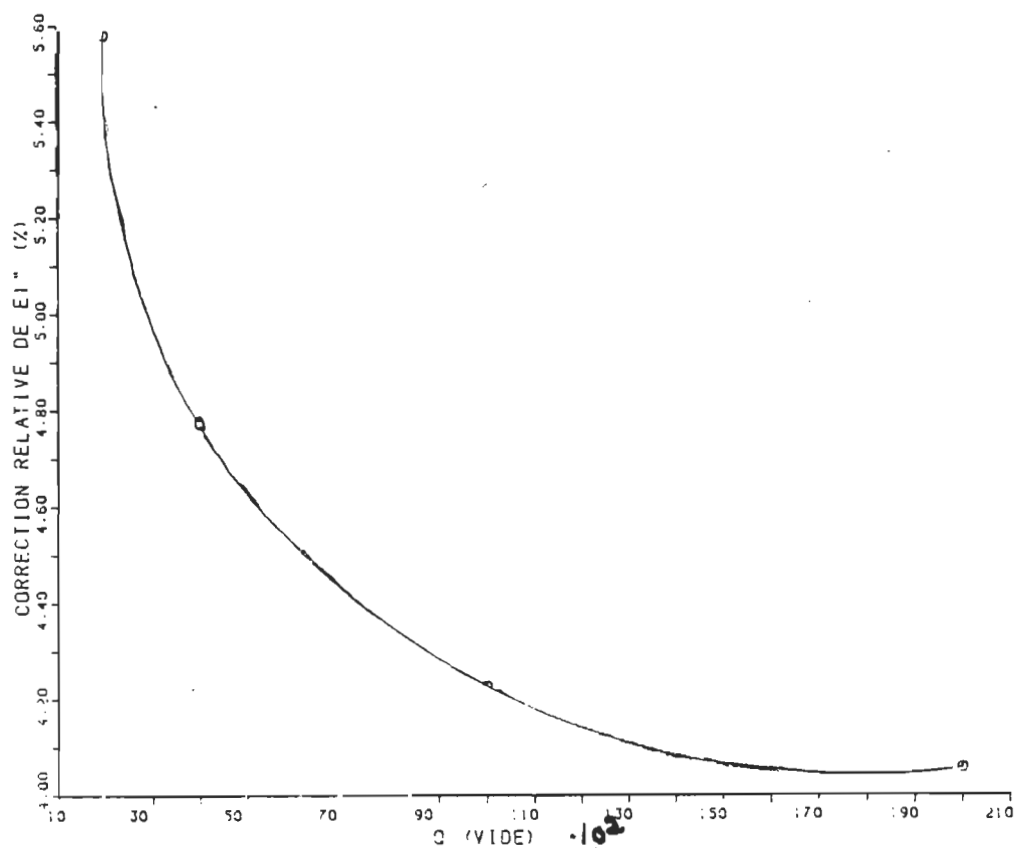
○ $E1' = 3.0$ $E1'' = 0.0$

⊕ $E1' = 81.0$ $E1'' = 0.0$

△ $E1' = 3.0$ $E1'' = 1.5$

★ $E1' = 81.0$ $E1'' = 27.0$

Figure 6.20 Correction relative de $E1'$ en fonction de $Q(\text{vide})$. Conductivité variable.



① $E1' = 81.0$ $E1'' = 27.0$

Figure 6.21 Correction relative de $E1''$ en fonction de Q (vide). Conductivité variable.

comme pour la courbe $\epsilon_1' = 3.0$, $\epsilon_1'' = 1.5$. Habituellement la cavité vide a un facteur de qualité de l'ordre de 4000, d'où on s'attend que la conductivité des parois introduise des erreurs relatives de l'ordre d'au plus un pour cent. On obtient des résultats similaires pour le coefficient de correction C de l'équation caractéristique approximative. De plus, la conductivité n'a aucun effet sur les coefficients de corrections D.

D'autre part, on remarque (figure 6.21) que la conductivité des parois produit une augmentation plus importante (un pour cent) des corrections relatives de la permittivité imaginaire, ce qui est assez important lorsque nous voulons des mesures de permittivité précises.

Dans ce travail, nous avons donc examiné soigneusement les effets de la conductivité des parois et du tube d'insertion conducteur; nous nous sommes aperçus qu'ils produisent des erreurs de quelques pour cent (sauf lorsque le rayon du milieu un tend vers zéro), ce qui est important lorsque nous voulons obtenir des mesures précises de permittivité. En incluant les effets de la conductivité des parois et du tube d'insertion conducteur, on se trouve donc à améliorer la précision des mesures de quelques pour cent. Pour obtenir des mesures de permittivité encore plus précise, il faudrait calculer les effets du circuit externe, ce qui en

principe, devrait être la prochaine étape .

ANNEXE A

Fonctions de Bessel

Cette annexe donne différentes relations impliquant les fonctions de Bessel [16].

Une équation de la forme

$$y''(z) + \frac{1}{z} y'(z) + \left(1 - \frac{n^2}{z^2}\right) y(z) = 0 \quad (\text{A. 1})$$

où $n \geq 0$ et z est un nombre complexe s'appelle équation de Bessel d'ordre n . La fonction de Bessel et la fonction de Neumann d'ordre n sont deux solutions linéairement indépendantes de cette équation.

Fonction de Bessel d'ordre n : $J_n(z)$

$$J_n(z) = \left(\frac{z}{2}\right)^n \sum_{r=0}^{\infty} \frac{(-1)^r}{r! (r+n)!} \left(\frac{z}{2}\right)^{2r} \quad (\text{A. 2})$$

Fonction de Neumann d'ordre n : $Y_n(z)$

$$Y_n(z) = \frac{2}{\pi} \left(\xi + \ln \frac{z}{2} \right) J_n(z) - \frac{1}{\pi} \sum_{r=0}^{n-1} \frac{(n-r-1)!}{r!} \left(\frac{z}{2} \right)^{-n+2r}$$

$$- \frac{1}{\pi} \sum_{r=0}^{\infty} (-1)^r \{x(r) + x(r+n)\} \frac{(z/2)^{2r+n}}{r! (n+r)!} \quad (\text{A. 3})$$

où

$\xi = 0.577215664401532\dots$ désigne la constante d'Euler^[11];

$$x(p) = 1 + 1/2 + 1/3 + \dots + 1/p \quad x(0) = 0 \quad (\text{A. 4})$$

Ces fonctions sont aussi appelées fonctions de Bessel de première et seconde espèce respectivement. La solution générale de l'équation de Bessel est donnée par la combinaison linéaire de ces deux solutions linéairement indépendantes.

$$S_n(z) = A J_n(z) + B Y_n(z) \quad (\text{A. 5})$$

La combinaison linéaire $S_n(z)$, pour toutes valeurs des constantes A et B , obéit aux relations de récurrence suivantes:

$$S_{n+1}(z) = \frac{2n}{z} S_n(z) - S_{n-1}(z) \quad (\text{A. 6})$$

$$z S'_n(z) = z S_{n-1}(z) - n S_n(z) \quad (\text{A. 7})$$

$$z S'_n(z) = n S_n(z) - z S_{n+1}(z) \quad (\text{A. 8})$$

$$\frac{d}{dz} \{z^n S_n(z)\} = z^n S_{n-1}(z) \quad (\text{A. 9})$$

$$\frac{d}{dz} \{z^{-n} S_n(z)\} = -z^{-n} S_{n+1}(z) \quad (\text{A. 10})$$

où le prime désigne une dérivé par rapport à l'argument.

Représentation des fonctions de petits arguments:

De l'équation (A. 8), on a

$$J'_n(z) = \frac{n}{z} J_n(z) - J_{n+1}(z) \quad (\text{A. 11})$$

$$Y'_n(z) = \frac{n}{z} Y_n(z) - Y_{n+1}(z) \quad (\text{A. 12})$$

Si la norme du nombre complexe z est beaucoup plus petite que un alors les séries entières $J_n(z)$ et $Y_n(z)$ deviennent

$$J_n(z) \approx \frac{z^n}{2^n n!} \quad (\text{A. 13})$$

$$Y_n(z) \approx \begin{cases} \frac{2}{\pi} \left(\ln \frac{z}{2} + \xi \right) & ; n = 0 \\ - \frac{(n-1)!}{\pi} \left(\frac{2}{z} \right)^n & ; n \neq 0 \end{cases} \quad (\text{A. 14})$$

En utilisant ces résultats dans les équations (A.11) et (A.12), on trouve

$$J'_n(z) \approx \frac{z^{n+1}}{2^{n+1} (n+1)!} \left(\frac{2n(n+1)}{z^2} \right) \quad (\text{A. 15})$$

$$Y'_n(z) \approx \begin{cases} \frac{n! 2^n}{\pi z^{n+1}} & n \neq 0 \\ \frac{2}{\pi z} & n = 0 \end{cases} \quad (\text{A. 16})$$

Identité impliquant $J_n(x)$ et $Y_n(x)$ simultanément.

Une relation importante impliquant les fonctions de Bessel et de Neumann est donnée ci-dessous:

$$\begin{aligned}
& J_{n+1}(z) Y_n(z) - J_n(z) Y_{n+1}(z) \\
&= J_n(z) Y'_n(z) - J'_n(z) Y_n(z) \\
&= \frac{2}{\pi z}
\end{aligned} \tag{A. 17}$$

Intégrales indéfinies comportant des combinaisons linéaires de fonction de Bessel et Neumann.

Des relations de récurrence (équations (A. 6) à (A. 10)), on obtient facilement

$$\int dz \, z S_0(z) = z S_1(z) \tag{A. 18}$$

$$\int dz \, z^n S_{n-1}(z) = z^n S_n(z) \tag{A. 19}$$

$$\int dz \, z^{-n} S_{n+1}(z) = -z^{-n} S_n(z) \tag{A. 20}$$

où

$$S_n(z) = A J_n(z) + B Y_n(z) \tag{A. 21}$$

Considérons les deux équations différentielles de Bessel:

$$S''_n(\alpha z) + \frac{1}{\alpha z} S'_n(\alpha z) + \left(1 - \frac{n^2}{\alpha^2 z^2} \right) S_n(\alpha z) = 0 \tag{A. 22}$$

$$\rho''_n(\beta z) + \frac{1}{\beta z} \rho'_n(\beta z) + \left(1 - \frac{n^2}{\beta^2 z^2} \right) \rho_n(\beta z) = 0 \quad (\text{A. 23})$$

où

$$\rho_n(\beta z) = C J_n(\beta z) + D Y_n(\beta z) \quad (\text{A. 24})$$

En multipliant la première équation par $\alpha^2 z \rho_n(\beta z)$ et la seconde par $\beta^2 z S_n(\alpha z)$, on obtient, en soustrayant:

$$\begin{aligned} z \{ \alpha^2 \rho_n(\beta z) S''_n(\alpha z) - \beta^2 S_n(\alpha z) \rho''_n(\beta z) \} \\ + \alpha \rho_n(\beta z) S'_n(\alpha z) - \beta S_n(\alpha z) \rho'_n(\beta z) \\ = - (\alpha^2 - \beta^2) z S_n(\alpha z) \rho_n(\beta z) \end{aligned} \quad (\text{A. 25})$$

c'est-à-dire:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dz} \{ z [\alpha \rho_n(\beta z) S'_n(\alpha z) - \beta S_n(\alpha z) \rho'_n(\beta z)] \} \\ = (\beta^2 - \alpha^2) z S_n(\alpha z) \rho_n(\beta z) \end{aligned} \quad (\text{A. 26})$$

Intégrons les deux membres de cette dernière relation, ce qui donne

$$\begin{aligned}
& \int dz \, z \, S_n(\alpha z) \, \rho_n(\beta z) \\
&= \frac{z \{ \alpha \rho_n(\beta z) S'_n(\alpha z) - \beta S_n(\alpha z) \rho'_n(\beta z) \}}{\beta^2 - \alpha^2} \\
&= \frac{z \{ \alpha \rho_n(\beta z) S_{n-1}(\alpha z) - \beta S_n(\alpha z) \rho_{n-1}(\beta z) \}}{\beta^2 - \alpha^2} \quad (\text{A. 27})
\end{aligned}$$

Si $\alpha = \beta$, on utilise la règle de l'Hospital^[17] pour trouver

$$\int dz \, z \, S_n(\alpha z) \, \rho_n(\alpha z) = \lim_{\beta \rightarrow \alpha} \int dz \, z \, S_n(\alpha z) \, \rho_n(\beta z) \quad (\text{A. 28})$$

$$= \left(\frac{z}{2\beta} \left[\alpha S'_n(\alpha z) \frac{\partial}{\partial \beta} \rho_n(\beta z) - S_n(\alpha z) \rho'_n(\beta z) - \beta S_n(\alpha z) \frac{\partial}{\partial \beta} \rho'_n(\beta z) \right] \right)_{(\beta=\alpha)}$$

Dans le cas où les coefficients des fonctions de Bessel J_n et de Neumann Y_n dans l'expression de $\rho_n(\beta z)$ ne dépendent pas de β , on peut écrire:

$$\frac{\partial}{\partial \beta} \rho_n(\beta z) = z \rho'_n(\beta z) \quad \frac{\partial}{\partial \beta} \rho'_n(\beta z) = z \rho''_n(\beta z) \quad (\text{A. 29})$$

On a ainsi

$$\begin{aligned}
& \int dz \, z \, S_n(\alpha z) \, \rho_n(\alpha z) \\
&= \frac{z}{2 \alpha} [\alpha z \, S'_n(\alpha z) \, \rho'_n(\alpha z) - S_n(\alpha z) \, \rho_n'(\alpha z) \\
&\quad - \alpha z \, S_n(\alpha z) \, \rho''_n(\alpha z)] \\
&= \frac{z}{2 \alpha} \left[\alpha z \, S'_n(\alpha z) \, \rho'_n(\alpha z) \right. \\
&\quad \left. + S_n(\alpha z) \, \alpha z \, \rho_n(\alpha z) \left(1 - \frac{n^2}{\alpha^2 z^2} \right) \right] \\
&= \frac{z^2}{2} \left[S'_n(\alpha z) \, \rho'_n(\alpha z) \right. \\
&\quad \left. + \left(1 - \frac{n^2}{\alpha^2 z^2} \right) S_n(\alpha z) \, \rho_n(\alpha z) \right] \quad (A. 30)
\end{aligned}$$

Mais en fait, ce résultat est valable même quand les coefficients de $\rho_n(Br)$ dépendent de B , puisqu'on vérifie aisément que

$$\begin{aligned}
z \, S_n(z) \, \rho_n(z) &= \frac{d}{dz} \left[\frac{z^2}{2} \left(S'_n(z) \, \rho'_n(z) \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + \left(1 - \frac{n^2}{z^2} \right) S_n(z) \, \rho_n(z) \right) \right] \quad (A. 31)
\end{aligned}$$

Utilisant l'équation (A.7), on obtient:

$$\begin{aligned}
 & \int dz \, z \, S_n(\alpha z) \, \rho_n(\alpha z) \\
 &= \frac{z^2}{2} \left(S_n(\alpha z) \, \rho_n(\alpha z) + S_{n-1}(\alpha z) \, \rho_{n-1}(\alpha z) \right. \\
 &\quad \left. - \frac{n}{\alpha z} S_{n-1}(\alpha z) \, \rho_n(\alpha z) - \frac{n}{\alpha z} S_n(\alpha z) \, \rho_{n-1}(\alpha z) \right) \quad (A.32)
 \end{aligned}$$

Intégrales définies comprenant $J(x)$ et $Y(x)$

Soit x_{0m} le même zéro de $J_0(x)$, où x est réel. Des relations précédentes, on trouve

$$\int_0^{x_{0m}} dx \, x \, J_0^2(x) = \frac{x_{0m}^2}{2} J_1^2(x_{0m}) \quad (A.33)$$

$$\int_0^{x_{0m}} dx \, x \, J_0(x) \, Y_0(x) = \frac{x_{0m}^2}{2} J_1(x_{0m}) \, Y_1(x_{0m}) \quad (A.34)$$

$$\int_0^{x_{0m}} dx \, x \, J_1^2(x) = \frac{x_{0m}^2}{2} J_1^2(x_{0m}) \quad (A.35)$$

$$\int_0^{x_{0m}} dx \, x^2 \, J_1(x) \, J_0(x) = \frac{x_{0m}^2}{2} J_1^2(x_{0m}) \quad (A.36)$$

$$\int_0^1 dz \, z \, J_0(x_{01} z) J_0(x_{0j} z) = 0 \quad ; \quad x_{01} \neq x_{0j} \quad (\text{A. 37})$$

Développements asymptotiques^[16]

On démontre que, pour les grandes valeurs de $|z|$ et pour $-\pi/2 < \arg z < +\pi/2$, on peut écrire

$$J_n(z) = \left(\frac{2}{\pi z} \right)^{1/2} [P_n(z) \cos \phi - Q_n(z) \sin \phi] \quad (\text{A. 38})$$

$$Y_n(z) = \left(\frac{2}{\pi z} \right)^{1/2} [P_n(z) \sin \phi + Q_n(z) \cos \phi] \quad (\text{A. 39})$$

où

$$\phi = z - (n + 1/2) \pi/2 \quad (\text{A. 40})$$

$$P_n(z) \sim 1 - \frac{(4n^2 - 1^2)(4n^2 - 3^2)}{2! (8z)^2} + \frac{(4n^2 - 1^2)(4n^2 - 3^2)(4n^2 - 5^2)(4n^2 - 7^2)}{4! (8z)^4} - \dots \quad (\text{A. 41})$$

$$Q_n(z) \sim \frac{4n^2 - 1}{1! 8z} - \frac{(4n^2 - 1^2)(4n^2 - 3^2)(4n^2 - 5^2)}{3! (8z)^3} + \dots \quad (\text{A. 42})$$

Les séries $P_n(z)$ et $Q_n(z)$ sont des développements

asymptotiques. On démontre^[16] que, pour z suffisamment grand, si on s'arrête au terme de rang k tel que

$$k > \frac{2n - 5}{4} \quad \text{pour } P_n(z) \quad (\text{A. 43})$$

$$k > \frac{2n - 7}{4} \quad \text{pour } Q_n(z) \quad (\text{A. 44})$$

l'erreur est inférieure au premier terme négligé. Les développements asymptotiques (A. 38) et (A. 39) sont très rapidement valables, même pour des valeurs de z qui ne sont pas très grandes ($z=10$, par exemple).

Zéros des fonctions de Bessel

Théorème: Pour n entier, les zéros de $J_n(z)$ sont tous réels.

Développement en série de fonctions de Bessel:

Soit $P_{nu}(r)$ défini comme suit:

$$P_{nu}(r) = \begin{cases} P_{nu}^{(1)}(r) & 0 \leq r \leq R_1 \\ P_{nu}^{(2)}(r) & R_1 \leq r \leq R_2 \\ \vdots & \vdots \\ P_{nu}^{(N-1)}(r) & R_{N-2} \leq r \leq R_{N-1} \end{cases} \quad (\text{A. 45})$$

Ici, les $P_{nu}^{(j)}(r)$ sont différentes combinaisons linéaires de $J_n(\kappa_{nu}r)$ et $Y_n(\kappa_{nu}r)$, telles que

$$P_{nujj} = P_{nu, j+1, j} \quad (A. 46)$$

$$\epsilon_j P'_{nujj} = \epsilon_{j+1} P'_{nu, j+1, j}$$

où

$$P_{nuij} = P_{nu}^{(i)}(R_j) \quad (A. 47)$$

$$j = 1, 2, \dots, N-2$$

et

$$P_{nu, N-1, N-1} = 0 \quad (A. 48)$$

Le prime indique la dérivée par rapport à $\kappa_{nu}r$. Ces combinaisons linéaires "P" de fonctions de Bessel et de Neumann obéissent aux relations de récurrence précédentes.

Montrons que, pour n fixe, les différents P_{nu} sont des fonctions orthogonales sur l'intervalle $(0, R_{N-1})$, par rapport au poids $r\epsilon$; c'est-à-dire:

$$\int_0^{R_{N-1}} r dr \epsilon P_{nu}(r) P_{nv}(r) = 0 \quad \text{si } u \neq v \quad (A. 49)$$

où

$$\epsilon = \begin{cases} \epsilon_1 & 0 \leq r \leq R_1 \\ \epsilon_2 & R_1 \leq r \leq R_2 \\ \vdots & \vdots \\ \epsilon_{N-1} & R_{N-2} \leq r \leq R_{N-1} \end{cases} \quad (\text{A. 50})$$

Utilisant l'équation (A. 27), on obtient, pour $u \neq v$

$$\begin{aligned} & \int_0^{R_{N-1}} r dr \epsilon P_{nu}(r) P_{nv}(r) \\ &= \sum_{j=1}^{N-1} \int_{R_{j-1}}^{R_j} r dr \epsilon_j P_{nu}^{(j)}(r) P_{nv}^{(j)}(r) \\ &= \sum_{j=1}^{N-1} \left(\frac{r \epsilon_j}{(\kappa_{nv}^2 - \kappa_{nu}^2)} \right. \\ & \quad \left. \{ \kappa_{nu} P_{nv}^{(j)}(r) P'_{nu}{}^{(j)}(r) \right. \\ & \quad \left. - \kappa_{nv} P_{nu}^{(j)}(r) P'_{nv}{}^{(j)}(r) \} \right) \Bigg|_{R_{j-1}}^{R_j} \\ &= 0 \end{aligned} \quad (\text{A. 51})$$

car

$$R_0 = 0;$$

les termes s'annulent à $r = 0$ à cause du facteur r ;

les termes s'annulent à $r = R_{N-1}$ à cause de $P_{nv, N-1, N-1}$ et de $P_{nu, N-1, N-1}$;
 les autres termes s'annulent entre eux, à cause de l'équation (A.46).

Si $u = v$, on trouve, d'autre part, à l'aide de l'équation (A.30),

$$\begin{aligned}
 & \int_0^{R_{N-1}} r dr \, \epsilon_{N-1} (P_{nu}(r))^2 \\
 &= \sum_{j=1}^{N-1} \int_{R_{j-1}}^{R_j} r dr \, \epsilon_j (P_{nu}^{(j)}(r))^2 \\
 &= \sum_{j=1}^{N-1} \left[\frac{\epsilon_j}{2} r^2 \left((P'_{nu}{}^{(j)}(r))^2 \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. + \left(1 - \frac{n^2}{(\kappa_{nu} r)^2} \right) (P_{nu}^{(j)}(r))^2 \right) \right]_{R_{j-1}}^{R_j} \\
 &= \frac{R_{N-1}^2}{2} \epsilon_{N-1} (P'_{nu, N-1, N-1})^2 \\
 &+ \sum_{j=1}^{N-2} \frac{R_j^2}{2} (\epsilon_j - \epsilon_{j+1}) \left[\left(1 - \frac{n^2}{(\kappa_{nu} R_j)^2} \right) P_{nujj}^2 \right. \\
 &\quad \left. - \frac{\epsilon_j}{\epsilon_{j+1}} P'_{nujj}^2 \right] \quad (A.52)
 \end{aligned}$$

Soit $f(r) = 1$ sur l'intervalle $(0, b)$. Faisons le développement de $f(r)$ en série de fonctions $P_{Ou}(r)$. On a

$$f(r) = \sum_{u=1}^{\infty} c_u P_{Ou}(r) \quad (A. 53)$$

d'où

$$\begin{aligned} \int_0^{R_{N-1}} r dr \, \epsilon P_{Ov}(r) f(r) &= \sum_{u=1}^{\infty} c_u \int_0^{R_{N-1}} r dr \, \epsilon P_{Ov}(r) P_{Ou}(r) \\ &= c_v \left(\frac{R_{N-1}^2}{2} \epsilon_{N-1} P_{1v, N-1, N-1}^2 \right. \\ &\quad + \sum_{j=1}^{N-2} \frac{R^2}{2} [\epsilon_j - \epsilon_{j+1}] \left[(P_{Ovjj})^2 \right. \\ &\quad \left. \left. - \frac{\epsilon_j}{\epsilon_{j+1}} (P_{1vjj})^2 \right] \right) \quad (A. 54) \end{aligned}$$

D'autre part, en utilisant les équations (A.18) et (A.46) on obtient:

$$\begin{aligned} \int_0^{R_{N-1}} r dr \, \epsilon P_{Ov}(r) f(r) &= \sum_{j=1}^{N-1} \int_{R_{j-1}}^{R_j} r dr \, \epsilon_j P_{Ov}^{(j)}(r) \\ &= \sum_{j=1}^{N-1} \frac{1}{\kappa_{Ov}} [\epsilon_j r P_{1v}^{(j)}(r)]_{R_{j-1}}^{R_j} \end{aligned}$$

$$= \frac{\epsilon_{N-1}}{\kappa_{OV}} R_{N-1} P_{1v, N-1, N-1} \quad (\text{A. 55})$$

donc,

$$c_v = \frac{\epsilon_{N-1}}{\kappa_{OV}} R_{N-1} P_{1v, N-1, N-1}$$

$$\left[\frac{R_{N-1}^2}{2} \epsilon_{N-1} P_{1v, N-1, N-1}^2 \right.$$

$$\left. + \sum_{j=1}^{N-2} \frac{R_j^2}{2} (\epsilon_j - \epsilon_{j+1}) \left((P_{OVJJ})^2 - \frac{\epsilon_j}{\epsilon_{j+1}} P_{1vJJ}^2 \right) \right]^{-1}$$

ANNEXE B

Conditions de continuité et de parfait conducteur

Cette annexe donne les conditions de continuité entre deux milieux adjacents, et les conditions de parfait conducteur.

Les équations fondamentales de l'électromagnétisme sont les équations suivantes:

$$\operatorname{div} \mathbf{d}(\mathbf{r}, t) = \rho(\mathbf{r}, t) \quad (\text{B. 1})$$

$$\operatorname{div} \mathbf{b}(\mathbf{r}, t) = 0 \quad (\text{B. 2})$$

$$\operatorname{rot} \mathbf{e}(\mathbf{r}, t) = -\frac{\partial}{\partial t} \mathbf{b}(\mathbf{r}, t) \quad (\text{B. 3})$$

$$\operatorname{rot} \mathbf{h}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{j}(\mathbf{r}, t) + \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{d}(\mathbf{r}, t) \quad (\text{B. 4})$$

La divergence de l'équation (4) donne

$$\operatorname{div} \left(\mathbf{j}(\mathbf{r}, t) + \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{d}(\mathbf{r}, t) \right) = 0 \quad (\text{B. 5})$$

Intégrons les équations (B. 2) et (B. 5) sur le volume de la

figure B. 1. On obtient:

$$\begin{aligned} \int_V dv \operatorname{div} \mathbf{b}(\mathbf{r}, t) &= \int_S d\mathbf{s} \cdot \mathbf{b}(\mathbf{r}, t) \\ &= 0 \end{aligned} \quad (\text{B. 6})$$

et

$$\begin{aligned} \int_V dv \operatorname{div} \left(\mathbf{j}(\mathbf{r}, t) + \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{d}(\mathbf{r}, t) \right) \\ = \int_S d\mathbf{s} \cdot \left(\mathbf{j}(\mathbf{r}, t) + \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{d}(\mathbf{r}, t) \right) \\ = 0 \end{aligned} \quad (\text{B. 7})$$

Si le volume est infinitésimal et que la hauteur du cylindre est beaucoup plus petite que son rayon, alors les variables ne varient pas sur les surfaces S_1 et S_2 , et les équations (B. 6) et (B. 7) donnent

$$b_2^P(\mathbf{r}, t) - b_1^P(\mathbf{r}, t) = 0 \quad (\text{B. 8})$$

$$j_{\text{tot } 2}^P - j_{\text{tot } 1}^P = 0 \quad (\text{B. 9})$$

où

$$j_{\text{tot}}^P = j^P(\mathbf{r}, t) + \frac{\partial}{\partial t} d^P(\mathbf{r}, t)$$

Les indices supérieurs t ou p réfèrent aux composantes

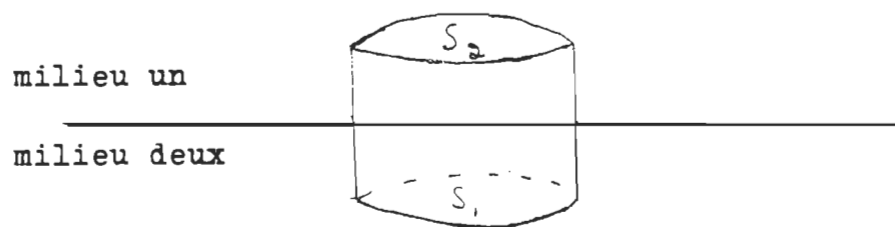


Figure B.1 Volume à l'interface des milieux un et deux.

tangentielles ou perpendiculaires des champs à l'interface, respectivement.

Considérons maintenant la figure B.2. Soit S_1 la surface quadrillée du côté du milieu 1 et S_2 la surface quadrillée du côté 2. Intégrons les équations (B.3) et (B.4) sur les surfaces S_1 et S_2 . Le contour 1 est parcouru dans le sens des aiguilles d'une montre. On a

$$\begin{aligned} \int_{S_1} ds \cdot [\text{rot } \mathbf{e}_1(\mathbf{r}, t)] &= \int_1 d\mathbf{l} \cdot \mathbf{e}_1(\mathbf{r}, t) \\ &= -\frac{\partial}{\partial t} \int_{S_1} ds \cdot \mathbf{b}_1(\mathbf{r}, t) \end{aligned} \quad (\text{B. 10})$$

$$\begin{aligned} \int_{S_2} ds \cdot [\text{rot } \mathbf{e}_2(\mathbf{r}, t)] &= - \int_1 d\mathbf{l} \cdot \mathbf{e}_2(\mathbf{r}, t) \\ &= -\frac{\partial}{\partial t} \int_{S_2} ds \cdot \mathbf{b}_2(\mathbf{r}, t) \end{aligned} \quad (\text{B. 11})$$

$$\begin{aligned} \int_{S_1} ds \cdot [\text{rot } \mathbf{h}_1(\mathbf{r}, t)] &= \int_1 d\mathbf{l} \cdot \mathbf{h}_1(\mathbf{r}, t) \\ &= \int_{S_1} ds \cdot \left(\mathbf{j}_1(\mathbf{r}, t) + \frac{\partial \mathbf{d}_1(\mathbf{r}, t)}{\partial t} \right) \end{aligned} \quad (\text{B. 12})$$

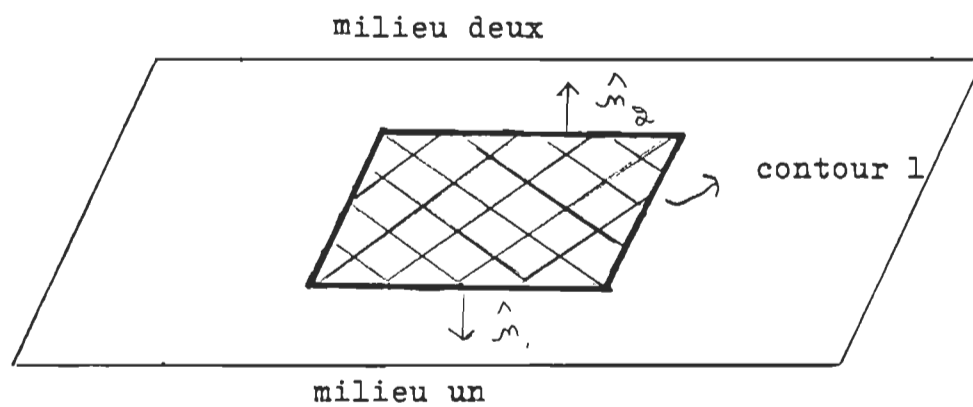


Figure B.2 Interface un-deux

$$\begin{aligned}
\int_{S_2} \mathbf{ds} \cdot [\text{rot } \mathbf{h}_2(\mathbf{r}, t)] &= - \int_1 \mathbf{dl} \cdot \mathbf{h}_2(\mathbf{r}, t) \\
&= \int_{S_2} \mathbf{ds} \cdot \left(\mathbf{j}_2(\mathbf{r}, t) + \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{d}_2(\mathbf{r}, t) \right) \quad (\text{B. 13})
\end{aligned}$$

Additionnons l'équation (B. 10) avec (B. 11), ce qui donne

$$\begin{aligned}
\int_1 \mathbf{dl} \cdot \mathbf{e}_1(\mathbf{r}, t) - \int_1 \mathbf{dl} \cdot \mathbf{e}_2(\mathbf{r}, t) \\
&= - \frac{\partial}{\partial t} \left(\int_{S_1} \mathbf{ds} \cdot \mathbf{b}_1(\mathbf{r}, t) + \int_{S_2} \mathbf{ds} \cdot \mathbf{b}_2(\mathbf{r}, t) \right) \\
&= - \frac{\partial}{\partial t} \iint_S \mathbf{ds} \cdot \mathbf{b}(\mathbf{r}, t) \\
&= 0 \quad (\text{B. 14})
\end{aligned}$$

De la même façon, des équations (B. 12) et (B. 13), on obtient

$$\int_1 \mathbf{dl} \cdot \mathbf{h}_1(\mathbf{r}, t) - \int_1 \mathbf{dl} \cdot \mathbf{h}_2(\mathbf{r}, t) = 0 \quad (\text{B. 15})$$

d'où

$$\mathbf{e}_1^t(\mathbf{r}, t) = \mathbf{e}_2^t(\mathbf{r}, t) \quad (\text{B. 16})$$

$$\mathbf{h}_1^t(\mathbf{r}, t) = \mathbf{h}_2^t(\mathbf{r}, t) \quad (\text{B. 17})$$

Si la dépendance temporelle peut s'exprimer comme suit,

$$\mathbf{e}(\mathbf{r}, t) = \text{Re} (\mathbf{E}(\mathbf{r}) e^{i\omega t}) \quad (\text{B. 18})$$

$$\mathbf{h}(\mathbf{r}, t) = \text{Re} (\mathbf{H}(\mathbf{r}) e^{i\omega t})$$

etc.

et si les matériaux sont linéaires et contiennent seulement des courants de conduction,

$$\mathbf{D}(\mathbf{r}) = \epsilon \mathbf{E}(\mathbf{r})$$

$$\mu \mathbf{H}(\mathbf{r}) = \mathbf{B}(\mathbf{r}) \quad (\text{B. 19})$$

$$\mathbf{J}(\mathbf{r}) = \sigma \mathbf{E}(\mathbf{r})$$

alors les conditions de continuité seront données par les équations suivantes:

$$B_2^P(\mathbf{r}) - B_1^P(\mathbf{r}) = 0 \quad (\text{B. 20})$$

$$H_2^t(\mathbf{r}) - H_1^t(\mathbf{r}) = 0 \quad (\text{B. 21})$$

$$\epsilon_2 E_2^P(\mathbf{r}) - \epsilon_1 E_1^P(\mathbf{r}) = 0 \quad (\text{B. 22})$$

$$E_2^t(\mathbf{r}) - E_1^t(\mathbf{r}) = 0 \quad (\text{B. 23})$$

Interface conducteur diélectrique

A l'intérieur de matériaux homogènes, isotropes et linéaires dans lesquels se trouvent seulement des courants de conduction, nous avons déjà établi, dans le chapitre deux,

les relations suivantes:

$$\operatorname{div} \mathbf{D}(\mathbf{r}) = 0 \qquad \operatorname{div} \mathbf{H}(\mathbf{r}) = 0 \qquad (\text{B. 24})$$

$$\operatorname{rot} \mathbf{E}(\mathbf{r}) = -i\omega\mu \mathbf{H}(\mathbf{r}) \qquad \operatorname{rot} \mathbf{H}(\mathbf{r}) = (\sigma + i\omega\epsilon) \mathbf{E}(\mathbf{r}) \qquad (\text{B. 25})$$

$$\{\operatorname{lap} - i\omega\mu (\sigma + i\omega\epsilon)\} \mathbf{E}(\mathbf{r}) = 0 \qquad (\text{B. 26})$$

$$\{\operatorname{lap} - i\omega\mu (\sigma + i\omega\epsilon)\} \mathbf{H}(\mathbf{r}) = 0 \qquad (\text{B. 27})$$

Considérons une interface ($z=0$) entre un diélectrique et un conducteur. On suppose que la distance sur laquelle les champs électromagnétiques varient substantiellement est beaucoup plus grande que la profondeur de pénétration.

A l'intérieur du conducteur, la conductivité est beaucoup plus élevée que le produit de la fréquence et de la permittivité

$$\sigma_c \gg \omega\epsilon_c \qquad (\text{B. 28})$$

Par hypothèse, on a

$$\frac{\partial^2}{\partial z^2} E_{xc} \gg \frac{\partial^2}{\partial x^2} E_{xc} \qquad \frac{\partial^2}{\partial z^2} E_{xc} \gg \frac{\partial^2}{\partial y^2} E_{xc} \qquad (\text{B. 29})$$

$$\frac{\partial^2}{\partial z^2} H_{xc} \gg \frac{\partial^2}{\partial x^2} H_{xc} \qquad \frac{\partial^2}{\partial z^2} H_{xc} \gg \frac{\partial^2}{\partial y^2} H_{xc} \qquad (\text{B. 30})$$

etc.

où

"c" indique la région conductrice ($z > 0$)

"d" indique la région diélectrique ($z < 0$)

Des équations d'onde, on obtiendra:

$$\frac{\partial^2}{\partial z^2} E_{xc} \approx i\omega\mu_c\sigma_c E_{xc} \quad (\text{B. 31})$$

$$\frac{\partial^2}{\partial z^2} H_{xc} \approx i\omega\mu_c\sigma_c H_{xc} \quad (\text{B. 32})$$

etc.

Les solutions de ces équations sont données par les équations suivantes:

$$E_{xc} = E_{xc}(z=0) \exp(-\{i\omega\mu_c\sigma_c\}^{1/2} z) \quad (\text{B. 33})$$

$$H_{xc} = H_{xc}(z=0) \exp(-\{i\omega\mu_c\sigma_c\}^{1/2} z) \quad (\text{B. 34})$$

etc.

En exprimant les rotationnels des champs électriques et magnétiques en composantes, on obtient

$$\frac{\partial}{\partial y} E_z - \frac{\partial}{\partial z} E_y = -i\omega\mu H_x \quad (\text{B. 35})$$

$$\left(\frac{\partial H}{\partial y} \frac{z}{z} - \frac{\partial H}{\partial z} \frac{y}{y} \right) \frac{1}{\sigma + i\omega\epsilon} = E_x \quad (\text{B. 36})$$

$$\frac{\partial E_x}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial x} = -i\omega\mu H_y \quad (\text{B. 37})$$

$$\left(\frac{\partial H}{\partial z} \frac{x}{x} - \frac{\partial H}{\partial x} \frac{z}{z} \right) \frac{1}{\sigma + i\omega\epsilon} = E_y \quad (\text{B. 38})$$

$$\frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y} = -i\omega\mu H_z \quad (\text{B. 39})$$

$$\left(\frac{\partial H}{\partial x} \frac{y}{y} - \frac{\partial H}{\partial y} \frac{x}{x} \right) \frac{1}{\sigma + i\omega\epsilon} = E_z \quad (\text{B. 40})$$

Des équations (B. 36), (B. 38), et (B. 40), on obtient

$$E_{xc} \approx \left(\frac{i\omega\mu_c}{\sigma_c} \right)^{1/2} H_{yc} \quad E_{yc} \approx - \left(\frac{i\omega\mu_c}{\sigma_c} \right)^{1/2} H_{xc} \quad (\text{B. 41})$$

$$E_{zc} \approx \frac{1}{\sigma_c} \left(\frac{\partial H}{\partial x} \frac{y}{y} - \frac{\partial H}{\partial y} \frac{x}{x} \right) \quad (\text{B. 42})$$

et des équations (B. 35), (B. 37) et (B. 39), on obtient

$$H_{xc} \approx - \left(\frac{\sigma_c}{i\omega\mu_c} \right)^{1/2} E_{yc} \quad H_{yc} \approx \left(\frac{\sigma_c}{i\omega\mu_c} \right)^{1/2} E_{xc} \quad (\text{B. 43})$$

$$H_{zc} \approx \frac{1}{-i\omega\mu_c} \left(\frac{\partial E_{yc}}{\partial x} - \frac{\partial E_{xc}}{\partial y} \right) \quad (\text{B. 44})$$

Utilisant les conditions de continuité (B.20) - (B.23), on obtient:

$$E_{xd} \approx \left(\frac{i\omega\mu_c}{\sigma_c} \right)^{1/2} H_{yd} \quad E_{yd} \approx - \left(\frac{i\omega\mu_c}{\sigma_c} \right)^{1/2} H_{xd} \quad (\text{B.45})$$

$$E_{zd} \approx \frac{1}{i\omega\epsilon_d} \left(\frac{\partial H_{yd}}{\partial x} - \frac{\partial H_{xd}}{\partial y} \right) \quad (\text{B.46})$$

$$H_{zd} \approx \left(\frac{1}{i\omega\mu_c \sigma_c} \right)^{1/2} \left(\frac{\partial H_{xd}}{\partial x} + \frac{\partial H_{yd}}{\partial y} \right) \quad (\text{B.47})$$

$$H_{xc} \approx - \left(\frac{\sigma_c}{i\omega\mu_c} \right)^{1/2} E_{yd} \\ = H_{xd} \quad (\text{B.48})$$

$$H_{yc} \approx \left(\frac{\sigma_c}{i\omega\mu_c} \right)^{1/2} E_{xd} \\ = H_{yd} \quad (\text{B.49})$$

Si la conductivité σ_c tend vers l'infini, alors les composantes de champs E_{xd} , E_{yd} et H_{zd} tendent vers zéro. Par conséquent, à la surface d'un parfait conducteur ($\sigma_c = \infty$), le champ électrique E doit être perpendiculaire à la surface conductrice, et le champ magnétique H tangent à la surface conductrice.

ANNEXE C

Programme PERMI

Cette annexe donne le programme informatique qui calcule la valeur précise de la permittivité d'un échantillon donné à partir de la fréquence de résonance complexe d'une cavité cylindrique conductrice ayant un tube d'insertion conducteur.

```
PROGRAM PERMI(IN2,IN1,IN3,TAPE1=IN1,TAPE2=IN2,TAPE3=IN3)

C      MODE TM(0,M,0)  E4=E3-EVIDE M<11                      R1.NE.O

C  LE PROGRAMME PERMI CALCULE LA PERMITTIVITE D'UN
C  ECHANTILLON DONNE, MILIEU UN OU MILIEU 2, DE LA
C  CONFIGURATION DE LA FIGURE 5.1 QUI CONSISTE EN UN
C  DIELECTRIQUE AU CENTRE, UN TUBE CAPILLAIRE DIELECTRIQUE
C  ET FINALEMENT UN ESPACE VIDE (AIR) ENTRE LE TUBE
C  CAPILLAIRE ET LE TUBE D'INSERTION CONDUCTEUR. CE
C  CALCUL S'EXECUTE A PARTIR D'UNE DES DEUX ENTREE
C  SUIVANTES.

C  1- LA FREQUENCE DE RESONANCE COMPLEXE OBTENUE DE LA
C  CAVITE CONDUCTRICE AYANT UN TUBE D'INSERTION CONDUCTEUR
C  (FIGURE 5.1)
C  2- LA VALEUR APPROXIMATIVE DE PERMITTIVITE OBTENUE
C  LORSQU'ON UTILISE L'EQUATION CARACTERISTIQUE EXACTE
C  (EQUATION (2.80) AVEC LES CHANGEMENTS DES EQUATIONS
C  (3.20) ET (3.21)) DE LA CAVITE FERMEE AYANT DES BOUTS
C  PARFAITEMENT CONDUCTEURS AU LIEU DE L'EQUATION
C  CARACTERISTIQUE DE LA CAVITE DE LA FIGURE (5.1). ON
C  PEUT CHOISIR ARBITRAIREMENT CETTE VALEUR APPROXIMATIVE
C  DE LA PERMITTIVITE, ET CE PROGRAMME DONNE LA VALEUR
C  CORRIGEE.
```

```

C      INPUT
C      FICHIER  IN1
C      M:  INDICE M DU MODE DE VIBRATION TM
C      H:  HAUTEUR DE LA CAVITE
C      RT:  RAYON DU TUBE CONDUCTEUR
C      FREVIDE:  FREQUENCE DE LA CAVITE VIDE
C      QVIDE:  FACTEUR DE QUALITE DE LA CAVITE VIDE
C      SEEKCW:  VARIABLE LOGIQUE UTILISEE LORSQUE NOUS VOULONS
C                CALCULER LA FREQUENCE DE RESONANCE COMPLEXE.
C                (DANS CE CAS, LES PERMITTIVITES DES MILIEUX UN
C                ET DEUX DOIVENT ETRE CONNUES ET L'UNE DES DEUX
C                EST UNE VALEUR APPROXIMATIVE).
C      SEEKCE1:  VARIABLE LOGIQUE UTILISEE LORSQUE NOUS
C                VOULONS CALCULER LA PERMITTIVITE DU MILIEU
C                UN
C      SEEKCE2:  VARIABLE LOGIQUE UTILISEE LORSQUE NOUS
C                VOULONS CALCULER LA PERMITTIVITE DU
C                MILIEU DEUX
C      NBMODE:  NOMBRE DE MODES DE VIBRATION DE L'INTERIEUR DU
C                TUBE CONDUCTEUR QUE NOUS ALLONS INCLURE DANS LE
C                CALCUL DE LA DEVIATION DE FREQUENCE DE
C                RESONANCE COMPLEXE , PAR RAPPORT A LA CAVITE
C                FERMEE. (EQUATIONS (5.24) ET (5.29))

C      FICHIER  IN2
C      R1:  RAYON DU DIELECTRIQUE DU CENTRE DE LA CAVITE
C            (MILIEU UN)
C      R2:  RAYON EXTERIEUR DU TUBE CAPILLAIRE DIELECTRIQUE.
C      FRE:  FREQUENCE DE RESONANCE MESUREE PAR LA CAVITE DE LA
C            FIGURE (5.1) DANS CETTE CONFIGURATION.
C      QMESUR:  FACTEUR DE QUALITE MESURE PAR LA CAVITE DE LA
C            FIGURE (5.1) DANS CETTE CONFIGURATION.

C      FICHIER  IN3
C      CE1:  PERMITTIVITE (VALEUR COMPLEXE) DU MILIEU UN.
C      CE2:  PERMITTIVITE (VALEUR COMPLEXE) DU MILIEU DEUX.
C      LES VARIABLES FRE, QMESUR, CE1 ET CE2 SONT FOURNIES
C      SEULEMENT SI CES VARIABLES SONT NECESSAIRES POUR LE
C      CHOIX QU'ON A FAIT DES PARAMETRES PRECEDENTS.
C      LORSQU'ELLES SONT INUTILES, NOUS LAISSONS DES VALEURS
C      QUELCONQUES DE MEME TYPE A LEURS PLACES RESPECTIVES.

      IMPLICIT COMPLEX(A,C)

C IN
C LES FONCTIONS SUIVANTES SONT DECLAREES EXTERNES CAR ON
C LES UTILISE COMME DES ARGUMENTS QU'ON PASSE A DES
C SOUS-ROUTINES.

      EXTERNAL FW,APPFW,FE1,APPFE1,FE2,APPFE2,FKN,APPFKN
      REAL KN,K(20),C
      COMPLEX CKN(20),CN(20),RO,ENERC

```

```

LOGICAL CORRIGE,SEEK CW,SEEKCE2,DEUXBOU,SEEKCE1,CORBOUT
COMMON/BCC/PI,XO(10)/BC1/M,H/BC2/R1,R2,RT,R3
* /BC14/NBMODE
* /BC3/CE1/BC4/CE2/BC5/CW

C XO(10): SONT LES DIX PREMIERS ZEROS DE LA FONCTION DE
C BESSEL D'ORDRE ZERO.

DATA XO/2.4048255577,5.5200781103,8.6537279129
* ,11.7915344390
* ,14.9309177085,18.0710639679,21.2116366299
* ,24.3524715308,27.4934791320,30.6346064684 /
PI=3.141592654
C=2.99792458E8

C LES CORRECTIONS DUES AUX EFFETS DE BOUTS NE SONT PAS
C FAITES, C'EST-A-DIRE, LA DEVIATION RELATIVE DE LA
C FREQUENCE COMPLEXE DUE AU TUBE D'INSERTION CONDUCTEUR
C N'EST PAS CALCULEE.

CORRIGE=.FALSE.

C 1- LIT LES PARAMETRES DE DEPART DU PROGRAMME.
C 2- CALCULE LES PARAMETRES DE DEPART, LE RAYON DU CORPS
C PRINCIPAL DE LA CAVITE, LA CONDUCTIVITE DES PAROIS ET
C ENSUITE LES IMPRIME AVEC LES PARAMETRES INITIAUX DU
C PROGRAMME.

CALL INPUT(SEEKCE1,SEEKCE2,SEEK CW,CE1,CE2,CW)

*****
*
* RESOLUTION DE L'EQUATION CARACTERISTIQUE
*
*
C DANS LA RESOLUTION DE L'EQUATION CARACTERISTIQUE 5.4, SI ON
C VEUT DETERMINER LA FREQUENCE DE RESONANCE COMPLEXE ALORS
C NOUS EFFECTUONS CE QUI SUIT.

1 IF(SEEK CW) THEN

C ON COMMENCE LA RECHERCHE REELLE A PARTIR DE LA
C FREQUENCE DE RESONANCE DE LA CAVITE VIDE AVEC UN PAS
C NEGATIF 250 FOIS PLUS PETIT. LE PAS EST NEGATIF,
C CAR LA FREQUENCE DIMINUE LORSQU'ON INSERE L'ECHANTILLON.

W=C*XO(M)/R3
PAS=-W/250

C ON EFFECTUE LA RECHERCHE REELLE PAR CHANGEMENT DE
C SIGNE DU ZERO DE L'EQUATION CARACTERISTIQUE (5.4) DONT

```

C LA SEULE INCONNUE EST LA FREQUENCE.

CALL ZROREEL(FW,W,PAS)
CW=CMPLX(W,0.0)

C PARTANT DU ZERO REEL QU'ON A TRANSFORME EN VALEUR
C COMPLEXE, ON CHERCHE LE ZERO COMPLEXE DE L'EQUATION
C CARACTERISTIQUE (5.4) PAR LA METHODE DE NEWTON. APPFW
C EST UNE FONCTION QUI DONNE LA VALEUR APPROXIMATIVE DU
C ZERO COMPLEXE , DE LA MEME FACON QUE DANS L'EQUATION
C (5.13).

CALL ZROCOMP(APPFW,CW)
PRINT*, 'CW=', CW

C ON NE CHERCHE PLUS LA FREQUENCE DE RESONANCE COMPLEXE.

SEEK CW=.FALSE.
ELSE IF(SEEKCE1) THEN

C ON DEBUTE LA RECHERCHE REELLE A PARTIR D'UNE
C PERMITTIVITE REELLE EGALE A UN ET ON CHOISIT UN PAS DE
C UN

RE1=1.0
PAS=1.0
RE2=REAL(CE2)
W=REAL(CW)

C ON CALCULE LE DENOMINATEUR ET LE NUMERATEUR ENTRE
C PARENTHESES DU DERNIER TERME DE L'EQUATION
C CARACTERISTIQUE REELLE CORRESPONDANT A L'EQUATION
C (5.4). (CONDUCTIVITE INFINIE, PERMITTIVITE REELLE ET
C FREQUENCE DE RESONANCE REELLE).

CALL CTEW(W,RE2)

C ON EFFECTUE LA RECHERCHE REELLE, PAR CHANGEMENT DE
C SIGNE, DU ZERO DE L'EQUATION CARACTERISTIQUE (5.4) DONT
C LA SEULE INCONNUE EST LA PERMITTIVITE DU MILIEU UN.

CALL ZROREEL(FE1,RE1,PAS)
CE1=CMPLX(RE1,0.0)

C ON CALCULE LE DENOMINATEUR ET LE NUMERATEUR ENTRE
C PARENTHESES DU DERNIER TERME DE L'EQUATION
C CARACTERISTIQUE COMPLEXE (5.4).

CALL CTECW(CW,CE2)

C ON TROUVE LE ZERO COMPLEXE PAR LA METHODE DE NEWTON.
C APPFE1 EST UNE FONCTION QUI DONNE LA VALEUR

C APPROXIMATIVE DU ZERO COMPLEXE, DE LA MEME FACON QUE
C DANS L'EQUATION (5.13).

```

      CALL ZROCOMP(APPFE1,CE1)
      PRINT *, 'CE1=', CE1
PRINT *, ' '
      PRINT *, ' '
      PRINT *, ' '
ELSE IF(SEEKCE2) THEN
      RE2=1.0
      PAS=1.0
      W=REAL(CW)

```

C ON CALCULE LES VALEURS DES MEMBRES DE DROITE DES
C EQUATIONS (5.5) ET (5.6) RELATIFS A L'EQUATION
C CARACTERISTIQUE (5.4).

```

      CALL PAR12(W)
      CALL ZROREEL(FE2,RE2,PAS)
      CE2=CMPLX(RE2,0.0)
      CALL CPAR12(CW)
      CALL ZROCOMP(APPFE2,CE2)
      PRINT *, 'CE2=', CE2
END IF

```

*

*

C SI LES CALCULS DES CONDITIONS NON IDEALES ONT ETE
C EFFECTUEES ALORS NOUS TERMINONS ICI.

```

      IF(CORRIGE) STOP

```

*

*

* CALCUL DE LA DEVIATION RELATIVE DE FREQUENCE

C ON CALCULE LES N PREMIERS NOMBRES D'ONDES DE
C L'INTERIEUR DU TUBE CONDUCTEUR, OU N= NBMODE.

C ON DEBUTE LA RECHERCHE REELLE AU VINGTIEME DU PREMIER
C NOMBRE D'ONDES DU TUBE CONDUCTEUR, ET ON PREND UN PAS
C EGAL AU CINQUIEME DE CE MEME NOMBRE D'ONDES.

```

      KN=XO(1)/(20*RT)
      DO 10 I=1,NBMODE
        PAS=XO(1)/(5*RT)

```

C ON EFFECTUE LA RECHERCHE DU ZERO REEL, PAR CHANGEMENT
C DE SIGNE DE L'EQUATION CARACTERISTIQUE (5.15).

```

      CALL ZROREEL(FKN,KN,PAS)
      K(I)=KN
      RO=CMPLX(K(I),0.0)

C  ON TROUVE LE ZERO COMPLEXE PAR LA METHODE DE NEWTON.
C  APPFKN EST LA FONCTION QUI DONNE LA VALEUR
C  APPROXIMATIVE DU ZERO COMPLEXE DE L'EQUATION
C  CARACTERISTIQUE (5.15), COMME DANS L'EQUATION (5.13).

      CALL ZROCOMP(APPFKN,RO)

C  ON AVANCE ARBITRAIREMENT D'UN VINGTIEME DE LA VALEUR DU
C  PREMIER NOMBRE D'ONDES, DE FACON A POUVOIR CHERCHER LE
C  PROCHAIN ZERO DE LA MEME MANIERE.

      CKN(I)=RO
      KN=KN+(XO(1)/(20*RT))
10      CONTINUE

C  CALCUL DES FONCTIONS DE BESSEL ET DE SES CONJUGUES, AINSI
C  QUE LES COMBINAISONS LINEAIRES "P" DEFINIES DANS
C  L'EQUATION (4.35).

      CALL BESABP(CKN,NBMODE)

C  CALCUL DES FACTEURS D'AMPLITUDE DU CENTRE DU TUBE
C  D'INSERTION CONDUCTEUR, EQUATION (5.34).

      CALL COEFC(CKN,CN,NBMODE,CE1,CE2)

C  CALCUL DU "M" DE L'EQUATION (5.30).

      CALL CALCUL1(CINTQ,CKN,CN,NBMODE)

C  CALCUL DU CHANGEMENT D'ENERGIE POUR PASSER DE LA CAVITE
C  AYANT UN TUBE D'INSERTION CONDUCTEUR A LA CAVITE
C  FERMEE.

      CALL CALCUL2(CINTV,CKN,CN,NBMODE)

C  CALCUL DE L'ENERGIE EMMAGASINEE DANS LA CAVITE,
C  EQUATION (5.25) OU (5.28).

      CALL WCAVITE(CW,CE1,CE2,ENERC)

C  CALCULE LA DEVIATION RELATIVE DE FREQUENCE DE RESONANCE
C  COMPLEXE PAR RAPPORT A LA CAVITE FERMEE AYANT DES BOUTS
C  PARFAITEMENT CONDUCTEURS (EQUATION (5.3)), ET ENSUITE
C  TRANSFORME LA FREQUENCE MESUREE EN FREQUENCE D'UNE TELLE
C  CAVITE.

```


C (EQUATION 5.47).

DVT=(RT**3)/(H*R3A**2)*1.2004039895
 DVC=-1/SQRT(2*FREVIDE*U0*SIGMAA)*(1/R3A)

C ON CALCULE LA FREQUENCE DE RESONANCE DE LA CAVITE VIDE
 C SANS TUBE D'INSERTION CONDUCTEUR, ET ENSUITE ON CALCULE
 C LE RAYON R3 DE LA CAVITE (EQUATION 5.45).

FREIDEA=FREVIDE*(1-(DVT+DVC))
 R3=C*X0(M)/(FREIDEA*2*PI)

C CALCUL DE LA CONDUCTIVITE DES PAROIS DE CAVITE
 C (EQUATION 5.43).

SIGMA=(QVIDE**2/(4*FREVIDE*PI*U0))*(2/R3+2/(H))**2

C CALCUL DE LA FREQUENCE DE RESONANCE COMPLEXE (EQUATION
 C 1.17).

CW=2*PI*FRE*(1+(0.0,1.0)/(2*QMESUR))

C IMPRESSION DES PARAMETRES

PRINT *, 'M=', M, ' H=', H, ' SIGMA=', SIGMA
 PRINT *, 'FREVIDE=', FREVIDE, ' QVIDE=', QVIDE
 IF(SEEK CW) THEN
 PRINT *, 'CE1=', CE1, ' CE2=', CE2
 ELSE IF(SEEK CE1) THEN
 PRINT *, 'FRE=', FRE, ' QMESUR=', QMESUR
 PRINT *, 'CE2=', CE2, ' CW=', CW
 ELSE IF(SEEK CE2) THEN
 PRINT *, 'FRE=', FRE, ' QMESUR=', QMESUR
 PRINT *, 'CE1=', CE1, ' CW=', CW
 END IF
 PRINT *, 'R1=', R1, ' R2=', R2, ' RT=', RT, ' R3=', R3
 PRINT *, '
 RETURN
 END

C
 C
 C

SUBROUTINE COEFC(CKN,CN,NBMODE,CE1,CE2)

C ROLE: CALCULE LES FACTEURS D'AMPLITUDE DU CENTRE DU
 C TUBE CONDUCTEUR DONNE PAR L'EQUATION (5.34).
 C IN
 C NBMODE: NOMBRE DE MODES DE VIBRATION DE L'INTERIEUR
 C DU TUBE CONDUCTEUR NECESSAIRES POUR CALCULER
 C LES EFFETS DE BOUTS (NBMODE.LE.20).
 C CKN(20): LES NOMBRES D'ONDES DE L'INTERIEUR DU TUBE
 C CONDUCTEUR CORRESPONDANT AU MODE DE


```

C          VIBRATION PRECEDENT.
C  CE1,CE2:  PERMITTIVITE DES MILIEUX UN ET DEUX.
C    P02(20),P12(20),P12C(20),P1T(20):  COMBINAISONS
C          LINEAIRES DES FONCTIONS DE BESSEL ET DE
C          NEUMANN DEFINIES DANS L'EQUATION (4.35).
C  P02(J):  ORDRE 0 ,RAYON R2, J IEME MODE DE VIBRATION
C  P12(J):  ORDRE 1, RAYON R2, J IEME MODE DE VIBRATION
C  P1T(J):  ORDRE 1, RAYON RT (DU TUBE CONDUCTEUR), J IEME
C          MODE DE VIBRATION.
C  P12C(J): ORDRE 1, RAYON R2, J IEME MODE DE VIBRATION,
C          LE C INDIQUE QUE NOUS PRENONS LA CONJUGUEE
C          DE LA COMBINAISON LINEAIRE CORRESPONDANTE.
C OUT
C  CN(20):  LES FACTEURS D'AMPLITUDE DU CENTRE DU TUBE
C          CONDUCTEUR CORRESPONDANT AU MODE DE VIBRATION
C          PRECEDENT.

```

```

      IMPLICIT COMPLEX(C,J,P)
      DIMENSION CN(20),CKN(20)
      REAL PI
      COMMON/BCC/PI/BC2/R1,R2,RT,R3/BC9/P02(20),P12(20),
*      P12C(20),P1T(20)/BC8/J01(20),J11(20),J01C(20),
*      J11C(20)/BC8B/CKNC(20),CNC(20)

```

```

C  CALCUL DES FACTEURS D'AMPLITUDE DU CENTRE DE LA CAVITE
C  (EQUATION 4.35).

```

```

      DO 10 I=1,NBMODE
        CKNN=CKN(I)
        CKNC(I)=CONJG(CKNN)
        CN(I)=(RT*P1T(I)/CKN(I))/
*        (((RT*P1T(I))**2/2+((CE1-CE2)*R1**2/2)*
*        (J01(I)**2-(CE1/CE2)*J11(I)**2)+((CE2-1)*R2**2/2)*
*        (P02(I)**2-CE2*P12(I)**2))
        CNN=CN(I)
        CNC(I)=CONJG(CNN)
10    CONTINUE
      RETURN
      END

```

```

C
C
C
C

```

```

      SUBROUTINE CALCUL1(INTQ,CKN,CN,NBMODE)
C  ROLE:  CALCUL DE L'INTEGRALE (4.75) OU, POUR LE CAS
C          REEL, L'INTEGRALE (4.77).
C IN
C  NBMODE:  NOMBRE DE MODES DE VIBRATIONS DE L'INTERIEUR
C          DU TUBE CONDUCTEUR NECESSAIRE POUR CALCULER
C          LES EFFETS DE BOUTS.
C  CKN(20):  LES NOMBRES D'ONDES DE L'INTERIEUR DU TUBE
C          CONDUCTEUR CORRESPONDANT AUX MODES DE

```

```

C              VIBRATION PRECEDENTS
C CN(20):  LES FACTEURS D'AMPLITUDE DU CENTRE DU TUBE
C              CONDUCTEUR CORRESPONDANT AUX MODES DE
C              VIBRATION PRECEDANTS.
C OUT
C INTQ:  VALEUR DE L'INTEGRALE (4.75) OU POUR LE CAS REEL
C              L'INTEGRALE (4.77).

      IMPLICIT COMPLEX(C,J,S)
      COMPLEX INTQ,MNM,CKN(20),CN(20),MATSOM(20,20)
      COMMON/BCC/PI/BC2/R1,R2,RT,R3/BC8/J01(20),J11(20),
*      J01C(20),J11C(20)/BC8B/CKNC(20),CNC(20)

C  INITIALISATION

      SOMC=(0.0,0.0)
      SOMD=(0.0,0.0)

C  CALCUL DES TERMES CROISES, DONNE PAR L'EQUATION (4.75),
C  SITUES D'UN SEUL COTE DE LA DIAGONALE.
C  MATSOM(N,M):  MATRICE DE CHAQUE TERME DE LA DOUBLE
C                  SOMMATION (4.75)
C  SOMC:  SOMC DES TERMES CROISES

      DO 20 N=1,NBMODE
        DO 30 M=1,N-1
          MNM=(2*PI*R1)/(CKNC(N)**2-CKN(M)**2)
          *      *(J01(M)*J11C(N)-J01C(N)*J11(M))
          MATSOM(N,M)=MNM*CNC(N)*CN(M)
          SOMC=SOMC+MATSOM(N,M)
30      CONTINUE
20      CONTINUE

C  CALCUL DES TERMES DIAGONAUX.  ON UTILISE L'EQUATION
C  (4.75) OU POUR LE CAS REEL L'EQUATION (4.77).
C  SOMD:  SOMME DES TERMES DIAGONAUX.

      DO 50 N=1,NBMODE
        IF(AIMAG(CKN(N)).NE.0) THEN
          MNM=(2*PI*R1)/(CKNC(N)**2-CKN(N)**2)
          *      *(J01(N)*J11C(N)-J01C(N)*J11(N))
          MATSOM(N,N)=MNM*CNC(N)*CN(N)
        ELSE
          MATSOM(N,N)=(PI*CN(N)**2/CKN(N))*(R1**2*(J01(N)**2
          *      +J11(N)**2)-R1*J01(N)*J11(N)/CKN(N))
        END IF
        SOMD=SOMD+MATSOM(N,N)
50      CONTINUE

C  L'INTEGRALE (4.75) OU (4.77) EST EGALE A LA SOMME DES
C  TERMES DIAGONAUX PLUS LA SOMME DES TERMES CROISES
C  SIUES DE PART ET D'AUTRE DE LA DIAGONALE.

```

```

INTQ=SOMD+2*SOMC
RETURN
END

```

```

C
C
C

```

```

SUBROUTINE CALCUL2(INTV,CKN,CN,NBMODE)

```

```

C  ROLE:  CALCUL DU CHANGEMENT D'ENERGIE POUR PASSER DE LA
C          CAVITE AYANT UN TUBE D'INSERTION CONDUCTEUR A LA
C          CAVITE FERMEE (EQUATION (4.68) OU, POUR LE CAS
C          REEL L'EQUATION (4.69))
C  NBMODE: NOMBRE DE MODES DE VIBRATION DE L'INTERIEUR
C          DU CONDUCTEUR QUE L'ON PREND POUR CALCULER LES
C          EFFETS DE BOUTS.
C  CKN(20): LES NOMBRES D'ONDES DE L'INTERIEUR DU TUBE
C          CONDUCTEUR CORRESPONDANT AUX MODES DE
C          VIBRATION PRECEDENTS.
C  CN(20):  LES FACTEURS D'AMPLITUDE DE L'INTERIEUR DU
C          TUBE CONDUCTEUR CORRESPONDANT AUX MODES DE
C          VIBRATION PRECEDENTS.
C  CE1,CE2: PERMITTIVITE DES MILIEUX UN ET DEUX.
C  P02(20),P12(20),P12C(20),P1T(20): COMBINAISONS
C          LINEAIRES DE FONCTIONS DE BESSEL ET DE
C          NEUMANN DEFINIES PAR L'EQUATION (4.35).
C          DANS LA SOUS-ROUTINE COEFC, ON A EXPLIQUE
C          LA NOTATION UTILISEE.

```

```

IMPLICIT COMPLEX(C,J,P,S)

```

```

C  LES FONCTIONS ARGR ET ARGJ SONT DECLAREES EXTERNAL CAR
C  ON LES PASSE COMME DES ARGUMENTS DANS LA SOUS-ROUTINE
C  DCADRE.
C  ARGR:  CALCULE LA PARTIE REELLE DE L'INTEGRANT DE
C          L'INTEGRALE I(KN,KM*), EQUATION (4.67)
C  ARGJ:  CALCULE LA PARTIE IMAGINAIRE DE L'INTEGRANT DE
C          L'INTEGRALE I(KN,KM*), EQUATION (5.41)

```

```

EXTERNAL ARGR,ARGJ
REAL PI
COMPLEX CKN(20),CN(20),INTV,MATSOM(20,20),IKK,KM,KNC
COMMON/BC2/R1,R2,RT,R3/BC3/CE1/BC4/CE2/BC8/J01(20),
*   J11(20),J01C(20),J11C(20)/BC8B/CKNC(20),CNC(20)/BCA/KM
*   ,KNC/BC9/P02(20),P12(20),P12C(20),P1T(20)/BCC/PI
RE2=REAL(CE2)
E1I=AIMAG(CE1)
E2I=AIMAG(CE2)
CE2C=CMPLX(RE2,-E2I)
BOR1=0.0
PI=3.141592654

```

```

C AERR,RERR:  PARAMETRES DE LA SOUS-ROUTINE DCADRE DE LA
C              LIBRAIRIE I.M.S.L. (INTERNATIONAL
C              MATHEMATICAL STATISTICAL LIBRARY)
C AERR:  ERREUR ABSOLUE SUR LE CALCUL D'UNE INTEGRALE. ON LE
C        PREND EGAL A ZERO; D'OU LA SOUS-ROUTINE DCADRE
C        S'OCCUPERA SEULEMENT DU PARAMETRE RERR.
C RERR:  ERREUR RELATIVE SUR LE CALCUL D'UN INTEGRALE. ON
C        DEMANDE QUATRE CHIFFRES SIGNIFICATIFS.

```

```

      AERR=0.0
      RERR=0.0001

```

```

C  INITIALISATION

```

```

      SOMC=(0.0,0.0)
      SOMD=(0.0,0.0)

```

```

C SI LES PERMITTIVITES DES MILIEUX UN OU DEUX NE SONT PAS
C REELLES ALORS ON CALCULE LE CHANGEMENT D'ENERGIE PAR
C L'EQUATION (4.68).
C SINON ON UTILISE L'EQUATION (4.69).

```

```

      IF((E1I.NE.0).OR.(E2I.NE.0)) THEN

```

```

C SI LE TUBE CONDUCTEUR CONTIENT UN SEUL DIELECTRIQUE
C ALORS LES NOMBRES D'ONDES SERONT REELS ET ON DOIT
C UTILISER L'EQUATION (4.69).

```

```

      IF(R1.EQ.RT) THEN
        DO 1000 N=1,NBMODE
          MATSOM(N,N)=2*PI*CN(N)*RT*P1T(N)/CKN(N)**2
          SOMD=SOMD+MATSOM(N,N)
1000      CONTINUE
          GO TO 2000
        ELSE
          END IF

```

```

C CALCUL DU CHANGEMENT D'ENERGIE PAR L'EQUATION (4.68).

```

```

      DO 20 N=1,NBMODE
        DO 30 M=1,NBMODE
          KM=CKN(M)
          KNC=CKNC(N)

```

```

C BOR1 ET BOR2:  SONT LES BORNES INFERIEURES
C                  ET SUPERIEURES D'INTEGRATION
C                  DE L'INTEGRALE I(KN,KM*),
C                  EQUATION (4.67).
C LA BORNE SUPERIEURE BOR2 A ETE CHOISIE COMME DANS
C L'EQUATION (5.40).

```

```

      BOR2=9.2103/(REAL(KM)+REAL(KNC))

```

```

C ON CALCULE LA PARTIE REELLE ET IMAGINAIRE DE L'INTEGRALE
C I(KN,KM*), EQUATION(4.67), DE LA SOUS-ROUTINE DCADRE,
C LAQUELLE CALCULE DES INTEGRALES ET EST DISPONIBLE EN
C LIBRAIRIE I.M.S.L.

```

```

      AIKKR=DCADRE(ARGR,BOR1,BOR2,AERR,RERR,ERROR,IER)
      AIKKI=DCADRE(ARGI,BOR1,BOR2,AERR,RERR,ERROR,IER)
      IKK=CMPLX(AIKKR,AIKKI)

```

```

C MATSOM(N,M): MATRICE CONTENANT LES TERMES DE LA DOUBLE
C               SOMMATION DE L'EQUATION (4.68).
C SOMD:  SOMME DES TERMES DIAGONAUX
C SOMC:  SOMME DES TERMES CROISES

```

```

      MATSOM(N,M)=4*CN(M)*CNC(N)*IKK*PI*(0.0,1.0)
      *CKNC(N)/(CKNC(N)**2-CKN(M)**2)
      *((R1*J01(M)*J11C(N)*AIMAG(CE1*CE2C)/CE2C)
      *+R2*P02(M)*P12C(N)*AIMAG(CE2))
      IF(N.EQ.M) THEN
        SOMD=SOMD+MATSOM(N,M)
      ELSE
        SOMC=SOMC+MATSOM(N,M)
      END IF
30      CONTINUE
20      CONTINUE
      ELSE

```

```

C CALCUL DU CHANGEMENT D'ENERGIE DONNE PAR L'EQUATION
C (4.69) CORRESPONDANT AU CAS REEL.

```

```

      DO 50 N=1,NBMODE
        MATSOM(N,N)=2*PI*CN(N)*RT*P1T(N)/CKN(N)**2
        SOMD=SOMD+MATSOM(N,N)
50      CONTINUE
2000 END IF

```

```

C LE CHANGEMENT D'ENERGIE EST DONNE PAR LA SOMME DES
C TERMES DIAGONAUX ET CROISES.

```

```

      INTV=SOMD+SOMC
      RETURN
      END

```

```

C
C
C

```

```

      SUBROUTINE PAR12(W)

```

```

C ROLE:  CALCUL DES TERMES ENTRE PARENTHESES DES
C EQUATIONS (5.5) ET (5.6) LORSQUE LES PARAMETRES
C IMPLIQUES SONT REELS.
C IN

```

```

C W: FREQUENCE DE RESONANCE (VALEUR REELLE) .
C OUT
C PAR1: PREMIERE PARENTHESE DE L'EQUATION (5.5) OU
C (5.6).
C PAR2: DEUXIEME PARENTHESE DE L'EQUATION (5.5) OU
C (5.6).

      REAL MMBSJO,MMBSJ1,K33,K32,YK33(1),YK32(2)
      COMMON/BC2/R1,R2,RT,R3/BC10/PAR1,PAR2
      * /BCC/PI/BC1/M,H
      C=2.99792458E8
      K33=W/C*R3
      K32=W/C*R2

C CALCULE LES FONCTIONS DE NEUMANN D'ARGUMENTS K33 ET K32.

      CALL MMBSYN(K33,0.0,1,YK33,IER)
      CALL MMBSYN(K32,0.0,2,YK32,IER)

C CALCUL DES TERMES ENTRE PARENTHESSES DES EQUATIONS (5.5)
C ET (5.6).

      PAR1=MMBSJ1(K32,IER)*YK33(1)-MMBSJO(K33,IER)*YK32(2)
      PAR2=MMBSJO(K33,IER)*YK32(1)-YK33(1)*MMBSJO(K32,IER)
      RETURN
      END

C
C
C
      FUNCTION FE2(RE2)

C ROLE: CALCUL DE L'EQUATION CARACTERISTIQUE REELLE DE LA
C CAVITE FERMEE AYANT DES BOUTS PARFAITEMENT CONDUCTEURS
C (EQUATION 5.4). PAR EQUATION REELLE ON SOUS-ENTEND
C L'EQUATION DANS LAQUELLE TOUTES LES QUANTITES
C IMPLIQUEES SONT REELLES. L'EQUATION CARACTERISTIQUE EST
C EXPRIMEE COMME UNE FONCTION DE LA PERMITTIVITE DU
C TUBE CAPILLAIRE DIELECTRIQUE (MILIEU DEUX).
C IN
C RE2: PERMITTIVITE DU TUBE CAPILLAIRE
C PAR1: VALEUR DE LA PREMIERE PARENTHESE DE L'EQUATION
C (5.5) OU (5.6).
C PAR2: VALEUR DE LA DEUXIEME PARENTHESE DE L'EQUATION
C (5.5) OU (5.6).
C OUT
C FE2: VALEUR DE L'EQUATION CARACTERISTIQUE REELLE
C CORRESPONDANT A L'EQUATION (5.4)

      IMPLICIT REAL(K,M)
      REAL YK21(2),YK22(2)
      COMPLEX CW
      COMMON/BC2/R1,R2,RT,R3/BC3/CE1/BC5/CW/BC10/PAR1,PAR2

```

```

      *   /BCC/PI/BC1/M,H
      C=2.99792458E8
      RE1=REAL(CE1)
      W=REAL(CW)

C  CALCUL DES NOMBRES D'ONDES FOIS LES RAYONS.

      K32=W/C*R2
      K22=SQRT(RE2)*W/C*R2
      K21=SQRT(RE2)*W/C*R1
      K11=SQRT(RE1)*W/C*R1

C  CALCUL DES FONCTIONS DE NEUMANN.

      CALL  MMBSYN(K21,0.0,2,YK21,IER)
      CALL  MMBSYN(K22,0.0,2,YK22,IER)

C  CALCUL DE ALPHA, EQUATION (5.5), ET DE BETA, EQUATION
C    (5.6).

      ALPHA=MMBSJO(K22,IER)*PAR1+(RE2*K32/K22)*
      *      MMBSJ1(K22,IER)*PAR2
      BETA=YK22(1)*PAR1+(RE2*K32/K22)*YK22(2)*PAR2

C  CALCUL DE L'EQUATION CARACTERISTIQUE REELLE (5.4)

      FE2=(RE1*K21)/(RE2*K11)+(MMBSJO(K11,IER)/
      *      /MMBSJ1(K11,IER))
      *      *((MMBSJ1(K21,IER)*BETA-YK21(2)*ALPHA)/
      *      (YK21(1)*ALPHA-BETA*MMBSJO(K21,IER)))
      RETURN
      END

C
C
C
      SUBROUTINE CPAR12(CW)

C  ROLE:  CALCULER LES TERMES ENTRE PARENTHESES DES
C  EQUATIONS (5.5) ET (5.6).
C  IN
C  CW:  FREQUENCE DE RESONANCE COMPLEXE.
C  OUT
C  CPAR1:  VALEUR DE LA PREMIERE PARENTHSE DE L'EQUATION
C          (5.5) OU (5.6).
C  CPAR2:  VALEUR DE LA DEUXIEME PARENTHSE DE L'EQUATION
C          (5.5) ET (5.6).

      IMPLICIT COMPLEX(C,K,J,Y)
      REAL C
      COMMON/BC2/R1,R2,RT,R3/BC11/CPAR1,CPAR2/BC12/SIGMA
      *   /BC1/M,H/BCC/PI
      C=2.99792458E8

```

```

UO=4*PI*1E-7
EO=(1/(C**2*UO))
W=REAL(CW)
K33=CW/C*R3
K32=K33*R2/R3

```

C CALCUL DES FONCTIONS DE BESSEL ET DE NEUMANN

```

CALL JN(K33,J033,J133)
CALL JN(K32,J032,J132)
Y033=CYN(K33,0,J033)
Y032=CYN(K32,0,J032)
Y132=CYN(K32,1,J132)

```

C J033: CORRESPOND AU TAU (GREC) DE L'EQUATION (5.7).
 C Y033: CORRESPOND AU PSI DE L'EQUATION (5.8).

```

J033=J033-CSQRT(-(0.0,1.0)*W*EO/SIGMA)*J133
Y033=Y033-CSQRT(-(0.0,1.0)*W*EO/SIGMA)*Y133

```

C CALCUL DES TERMES ENTRE PARENTHESES DES EQUATIONS (5.5)
 C ET (5.6).

```

CPAR1=J132*Y033-J033*Y132
CPAR2=J033*Y032-Y033*J032
RETURN
END

```

C
 C
 C

FUNCTION CFE2(CE2)

C ROLE: CALCUL DE L'EQUATION CARACTERISTIQUE COMPLEXE DE
 C LA CAVITE FERMEE AYANT DES BOUTS PARFAITEMENT
 C CONDUCTEURS (EQUATION 5.4). L'EQUATION CARACTERISTIQUE
 C EST EXPRIMEE COMME UNE FONCTION DE LA PERMITTIVITE DU
 C MILIEU DEUX.

C IN

C CPAR1: PREMIERE PARENTHESE DE L'EQUATION (5.5) OU DE
 C L'EQUATION (5.6).

C CPAR2: DEUXIEME PARENTHESE DE L'EQUATION (5.5) OU DE
 C L'EQUATION (5.6).

C CE2: PERMITTIVITE (VALEUR COMPLEXE) DU MILIEU DEUX.

C OUT

C CFE2: VALEUR DE L'EQUATION CARACTERISTIQUE (5.14).

```

IMPLICIT COMPLEX(C,J,K,Y)
REAL C
COMPLEX ALPHA,BETA
COMMON/BC2/R1,R2,RT,R3/BC3/CE1/BC5/CW/BC11/CPAR1,CPAR2
* /BCC/PI/BC1/M,H
C=2.99792458E8

```


C CALCUL DES NOMBRES D'ONDES.

```

K32=CW/C*R2
K22=CSQRT(CE2)*CW/C*R2
K21=K22*R1/R2
K11=CSQRT(CE1)*CW/C*R1

```

C CALCUL DES FONCTIONS DE BESSEL ET DE NEUMANN.

```

CALL JN(K22,J022,J122)
CALL JN(K21,J021,J121)
CALL JN(K11,J011,J111)
Y022=CYN(K22,0,J022)
Y122=CYN(K22,1,J122)
Y021=CYN(K21,0,J021)
Y121=CYN(K21,1,J121)

```

C CALCUL DE ALPHA, EQUATION (5.5), ET DE BETA, EQUATION
C (5.6).

```

ALPHA=J022*CPAR1+(CE2*K32/K22)*J122*CPAR2
BETA=Y022*CPAR1+(CE2*K32/K22)*Y122*CPAR2

```

C CALCUL DE L'EQUATION CARACTERISTIQUE (5.4).

```

CFE2=(CE1*K21)/(CE2*K11)+(J011/J111)
*      *((J121*BETA-Y121*ALPHA)/
*      (Y021*ALPHA-BETA*J021))
RETURN
END

```

C
C

SUBROUTINE BESABP(KN,NBMODE)

C ROLE

C 1- CALCULE LES FONCTIONS DE BESSEL DES NOMBRES
C D'ONDES (FOIS LES RAYONS) DE L'INTERIEUR DU TUBE
C D'INSERTION CONDUCTEUR.
C 2- CALCULE LES COMBINAISONS LINEAIRES DES "P"
C DEFINIES DANS L'EQUATION (4.35)

C IN

C NBMODE: NOMBRES DE MODE DE VIBRATION DE L'INTERIEUR DU
C TUBE D'INSERTION CONDUCTEUR NECESSAIRES POUR
C CALCULER LES EFFETS DE BOUTS.
C KN(20): CE SONT LES NOMBRE D'ONDES DE L'INTERIEUR DU
C TUBE CONDUCTEUR CORRESPONDANT AUX MODES DE
C VIBRATION PRECEDENTS.

C OUT

C JJ01(20): FONCTION DE BESSEL D'ORDRE ZERO, D'ARGUMENT
C (KN*R1).
C JJ11(20): FONCTION DE BESSEL D'ORDRE UN, D'ARGUMENT

```

C          (KN*R1).
C JJ01C(20): CONJUGUE DE LA FONCTION DE BESSEL D'ORDRE
C          ZERO, D'ARGUMENT (KN*R1).
C JJ11C(20): CONJUGUE DE LA FONCTION DE BESSEL D'ORDRE
C          UN, D'ARGUMENT (KN*R1).
C P02(20):  COMBINAISON LINEAIRE "P" D'ORDRE ZERO ET DE
C          RAYON R2.
C P12(20):  COMBINAISON LINEAIRE "P" D'ORDRE UN ET DE
C          RAYON R2.
C P1T(20):  COMBINAISON LINEAIRE "P" D'ORDRE UN ET DE
C          RAYON RT (DU TUBE CONDUCTEUR).
C P12C(20): CONJUGUE DE LA COMBINAISON LINEAIRE "P"
C          D'ORDRE UN ET DE RAYON R2.

      IMPLICIT COMPLEX(A,B,C,J,Y,K,P)
      DIMENSION KN(20)
      REAL PI
      COMMON/BC2/R1,R2,RT,R3/BC8/JJ01(20),JJ11(20),JJ01C(20)
      *      ,JJ11C(20)/BC9/P02(20),P12(20),P12C(20),P1T(20)
      *      /BCC/PI/BC3/CE1/BC4/CE2

      DO 10 I=1,NBMODE

C  CALCUL DES ARGUMENTS DES FONCTIONS DE BESSEL ET DE
C  NEUMANN.

      KN1=KN(I)*R1
      KN2=KN(I)*R2
      KNT=KN(I)*RT

C  CALCUL DES FONCTIONS DE BESSEL ET DE NEUMANN.

      CALL JN(KN1,J01,J11)
      CALL JN(KN2,J02,J12)
      CALL JN(KNT,J0T,J1T)
      Y01=CYN(KN1,0,J01)
      Y02=CYN(KN2,0,J02)
      Y12=CYN(KN2,1,J12)
      Y1T=CYN(KNT,1,J1T)

C  CALCUL DES FACTEURS D'AMPLITUDE A ET B DE L'INTERIEUR
C  DU TUBE CONDUCTEUR (EQUATIONS (5.49) A (5.52)).

      AU2=1+PI*KN1*(Y01*J11*(CE1/CE2-1))/2
      BU2=-PI*KN1*(J01*J11*(CE1/CE2-1))/2
      AU3=AU2*(1+PI*KN2*Y02*J12*(CE2-1)/2)
      *      +BU2*(PI*KN2*Y02*Y12*(CE2-1)/2)
      BU3=BU2*(1-PI*KN2*J02*Y12*(CE2-1)/2)
      *      -AU2*(PI*KN2*J12*J02*(CE2-1)/2)

C  CALCUL DES COMBINAISONS LINEAIRES DES FONCTIONS DE
C  BESSEL ET DE NEUMANN DEFINIES DANS L'EQUATION (4.35).

```

```

      P02(I)=AU2*J02+BU2*Y02
      P12(I)=AU2*J12+BU2*Y12
      P1T(I)=AU3*J1T+BU3*Y1T
      P12S=P12(I)
      P12C(I)=CONJG(P12S)

C  CALCUL DES CONJUGUES DES FONCTIONS DE BESSEL JJ01 ET
C    JJ11.

      JJ01(I)=J01
      JJ11(I)=J11
      JJ01C(I)=CONJG(J01)
      JJ11C(I)=CONJG(J11)
10  CONTINUE
      RETURN
      END

C
C
C
      FUNCTION APPFE1(RO)

C  ROLE:  CALCULE LA VALEUR APPROXIMATIVE DU ZERO COMPLEXE
C  (LA PERMITTIVITE DU MILIEU UN) DE L'EQUATION
C  CARACTERISTIQUE (5.4) DE LA MEME FACON QUE DANS
C  L'EQUATION (5.14C).
C  IN
C  RO:  VALEUR APPROCHEE DU ZERO COMPLEXE
C  OUT
C  APPFE1:  VALEUR APPROXIMATIVE DU ZERO COMPLEXE

      COMPLEX RO,APPFE1,CFE1
      DELTA=RO*1E-6

C  CALCUL DE LA VALEUR APPROXIMATIVE, DE LA MEME FACON QUE
C  DANS L'EQUATION (5.14C).

      APPFE1=RO-(DELTA/(CFE1(RO+DELTA)/CFE1(RO)-1))
      RETURN
      END

C
C
C
      FUNCTION APPFE2(RO)

C  ROLE:  CALCULE LA VALEUR APPROXIMATIVE DU ZERO COMPLEXE
C  (PERMITTIVITE DU MILIEU) DE L'EQUATION CARACTERISTIQUE
C  (5.4) DE LA MEME FACON QUE DANS L'EQUATION (5.14C).
C  IN
C  RO:  VALEUR APPROCHEE DU ZERO COMPLEXE.
C  OUT
C  APPFE2:  VALEUR APPROXIMATIVE DU ZERO COMPLEXE

```

COMPLEX RO,APPFE2,CFE2
 DELTA=RO*1E-6

C CALCUL DE LA VALEUR APPROXIMATIVE DU ZERO COMPLEXE.

APPFE2=RO-(DELTA/(CFE2(RO+DELTA)/CFE2(RO)-1))
 RETURN
 END

C
 C
 C

SUBROUTINE CD(ENERC,INT2,INTV,INTQ)

C ROLE

C 1- CALCULE LES COEFFICIENTS DE CORRECTION C ET D
 C DONNES PAR LES EQUATIONS (4.98) ET (4.101).
 C 2- CALCULE LES VALEURS CORRIGEEES DE LA PERMITTIVITE
 C DU MILIEU UN.

C IN

C ENERC: ENERGIE EMMAGASINEE DANS LA CAVITE.
 C INTQ: VALEUR DU "M" DE L'EQUATION (5.31).
 C INTV: VALEUR DE LA DOUBLE SOMMATION DE L EQUATION
 C (5.24).
 C INT2: VALEUR DE LA DOUBLE SOMMATION DE L'EQUATION
 C (5.24), MAIS EN PRENANT LA PERMITTIVITE DU MILIEU
 C DU CENTRE EGAL A UN.
 C OUT: (SONT SEULEMENT IMPRIMES)
 C C,D: VALEURS DES COEFFICIENTS DE CORRECTIONS C ET D
 C DONNES DANS LES EQUATIONS (4.98) ET (4.100).
 C RE1C: VALEUR CORRIGEE DE LA PARTIE REELLE DE LA
 C PERMITTIVITE DU MILIEU UN.
 C E1IC: VALEUR CORRIGEE DE LA PARTIE IMAGINAIRE DE LA
 C PERMITTIVITE DU MILIEU UN.

IMPLICIT COMPLEX(I)
 REAL MMBSJ1
 COMPLEX ENERT2,ENERT,ENERC,CE1,CE2
 COMMON/BCC/PI,X0(10)/BC1/M,H/BC2/R1,R2,RT,R3
 * /BC3/CE1/BC4/CE2/BC16/QDIEL
 RE1=REAL(CE1)
 E1I=AIMAG(CE1)

C CALCUL DE LA DEVIATION DE FREQUENCE DE RESONANCE DUE AU
 C TUBE D'INSERTION AVEC L'ECHANTILLON DVR2 ET SANS
 C L'ECHANTILLON DVR1

DVR2=REAL(INT2)/(REAL(ENERC))
 DVR1=REAL(INTV)/(REAL(ENERC))

C CALCUL DES COEFFICIENTS DE CORRECTION C ET D DONNES PAR
 C LES EQUATIONS (4.98) ET (4.101).

```

      C=(MMBSJ1(XO(M),IER)*R3)**2
      *      *H*REAL(INT2-INTV)/((RE1-1)*R1**2*RT
      *      *REAL(ENERC)*2)
      D=INTQ/(PI*R1**2*RT)

```

C CALCUL DES VALEURS CORRIGÉES DE LA PARTIE REELLE ET
C IMAGINAIRE DE LA PERMITTIVITE DU MILIEU UN.

```

      E1IC=E1I*(1-2*RT*D/H)
      RE1C=RE1*(1+2*RT*C/H)
      PRINT *, 'RE1C=', RE1C, '      E1IC=', E1IC
      PRINT *, 'C=', C, '      D=', D
      RETURN
      END

```

C
C
C
C

SUBROUTINE CANBN(CA,CB,CE1,CE2,CW)

C ROLE: CALCULE LES FACTEURS D'AMPLITUDE DE L'INTERIEUR
C DE LA CAVITE (EQUATIONS (2.72) ET (2.73)).
C IN
C CE1,CE2: PERMITTIVITES DES MILIEUX UN ET DEUX.
C CW: FREQUENCE DE RESONANCE COMPLEXE.
C OUT
C CA(3),CB(3): FACTEURS D'AMPLITUDE DE L'INTERIEUR DE LA
C CAVITE (EQUATIONS (2.72) ET (2.73)).

```

      IMPLICIT COMPLEX(J,Y,K,C)
      REAL C
      DIMENSION CA(3),CB(3)
      COMMON/BCC/PI/BC1/M,H/BC2/R1,R2,RT,R3
      C=2.99792458E8

```

C CALCUL DES NOMBRES D'ONDES DE L'INTERIEUR DE LA CAVITE.

```

      K21=CSQRT(CE2)*CW/C*R1
      K11=CSQRT(CE1)*CW/C*R1
      K32=CW/C*R2
      K22=CSQRT(CE2)*CW/C*R2

```

C CALCUL DES FONCTIONS DE BESSEL ET DE NEUMANN.

```

      CALL JN(K32,JOK32,J1K32)
      CALL JN(K22,JOK22,J1K22)
      CALL JN(K21,JOK21,J1K21)
      CALL JN(K11,JOK11,J1K11)
      YOK21=CYN(K21,0,JOK21)
      Y1K21=CYN(K21,1,J1K21)
      YOK32=CYN(K32,0,JOK32)

```

```

C
  YOK22=CYN(K22,0,JOK22)
  Y1K32=CYN(K32,1,J1K32)
  Y1K22=CYN(K22,1,J1K22)

C  CALCUL DES FACTEURS D'AMPLITUDE (EQUATIONS (2.72) ET
C  (2.73)).

  CA(2)=1+(PI*K21/2)*(Y1K21*(JOK21-JOK11)+
*   YOK21*(((CE1*K21)/(CE2*K11))*J1K11-J1K21))
  CB(2)=(PI*K21/2)*(JOK11*J1K21-((CE1*K21)/(CE2*K11))
*   *J1K11*JOK21)
  CA(3)=CA(2)*(1+(PI*K32/2)*(Y1K32*(JOK32-JOK22)+YOK32*
*   (((CE2*K32)/K22)*J1K22-J1K32)))+CB(2)*(PI*K32/2)*
*   (((CE2*K32)/K22)*Y1K22*YOK32-Y1K32*YOK22)
  CB(3)=CB(2)*(1-(PI*K32/2)*(J1K32*(YOK32-YOK22)+
*   JOK32*(((CE2*K32)/K22)*Y1K22-Y1K32)))
*   -CA(2)*((PI*K32/2)*(((CE2*K32)/K22)*J1K22*JOK32
*   -J1K32*JOK22))
  RETURN
  END

C
C
C
  FUNCTION FW(W)

C  ROLE:  CALCUL DE L'EQUATION CARACTERISTIQUE REELLE
C  DE LA CAVITE FERMEE AYANT DES BOUTS PARFAITEMENT
C  CONDUCTEURS (EQUATION (5.4)).  L'EQUATION
C  CARACTERISTIQUE EST EXPRIMEE COMME UNE FONCTION DE LA
C  FREQUENCE DE RESONANCE.
C  IN
C  W:  FREQUENCE DE RESONANCE ( VALEUR REELLE).
C  OUT
C  FW:  VALEUR DE L'EQUATION CARACTERISTIQUE REELLE
C       CORRESPONDANT A L'EQUATION (5.4)

  REAL  A(3),B(3),MMBSJO,K33,YK33(1)
  COMPLEX CE1,CE2
  COMMON/BCC/PI/BC1/M,H/BC2/R1,R2,RT,R3/BC3/CE1/BC4/CE2
  RE1=REAL(CE1)
  RE2=REAL(CE2)
  C=2.99792458E8
  ORDRE=0.0
  NB=1

C  CALCUL DES FONCTIONS DE NEUMANN D'ARGUMENT K33.

  K33=W/C*R3
  CALL  MMBSYN(K33,ORDRE,NB,YK33,IER)

C  CALCULE LES FACTEURS D'AMPLITUDE DE L'INTERIEUR DE LA

```

C CAVITE, EQUATIONS (2.72) ET (2.73).

CALL ANBN(A,B,RE1,RE2,W)

C CALCULE L'EQUATION CARACTERISTIQUE (5.4).

FW=A(3)*MMBSJO(K33,IER)+B(3)*YK33(1)

RETURN

END

C
C
C

SUBROUTINE ANBN(A,B,RE1,RE2,W)

C ROLE: CALCULE LES FACTEURS D'AMPLITUDE DE L'INTERIEUR
C DE LA CAVITE, EQUATIONS (2.72) ET 2.73), POUR LE CAS
C REEL.

C IN

C RE1,RE2: PARTIE REELLE DE LA PERMITTIVITE DES MILIEUX
C UN ET DEUX RESPECTIVEMENT.

C W: PARTIE REELLE DE LA FREQUENCE DE RESONANCE.

C OUT

C A(3),B(3): FACTEURS D'AMPLITUDE DE L'INTERIEUR DE LA
C CAVITE, EQUATIONS (2.72) ET (2.73).

IMPLICIT REAL(J,K)

REAL A(3),B(3),YK21(2),YK32(2),YK22(2)

REAL MMBSJO,MMBSJ1

COMMON/BCC/PI/BC1/M,H/BC2/R1,R2,RT,R3

NB=2

ORDRE=0.0

C=2.99792458E8

C CALCUL DES NOMBRES D'ONDES.

K21=SQRT(RE2)*W/C*R1

K11=SQRT(RE1)*W/C*R1

K32=W/C*R2

K22=SQRT(RE2)*W/C*R2

C CALCUL DES FONCTIONS DE BESSEL ET DE NEUMANN.

CALL MMBSYN(K21,ORDRE,NB,YK21,IER)

JOK21=MMBSJO(K21,IER)

JOK11=MMBSJO(K11,IER)

J1K11=MMBSJ1(K11,IER)

J1K21=MMBSJ1(K21,IER)

CALL MMBSYN(K32,ORDRE,NB,YK32,IER)

CALL MMBSYN(K22,ORDRE,NB,YK22,IER)

JOK32=MMBSJO(K32,IER)

JOK22=MMBSJO(K22,IER)

J1K32=MMBSJ1(K32,IER)

J1K22=MMBSJ1(K22,IER)

C CALCUL DES FACTEURS D'AMPLITUDE.

```

      A(2)=1+(PI*K21/2)*(YK21(2)*(JOK21-JOK11)+
*      YK21(1)*(((RE1*K21)/(RE2*K11))*J1K11-J1K21))
      B(2)=(PI*K21/2)*(JOK11*J1K21-((RE1*K21)/(RE2*K11))
*      *J1K11*JOK21)
      A(3)=A(2)*(1+(PI*K32/2)*(YK32(2)*(JOK32-JOK22)
*      +YK32(1)*
*      ((RE2*K32/K22)*J1K22-J1K32)))+B(2)*((PI*K32/2)*
*      ((RE2*K32/K22)*YK22(2)*YK32(1)-YK32(2)*YK22(1)))
      B(3)=B(2)*(1-(PI*K32/2)*(J1K32*(YK32(1)-YK22(1))
*      +JOK32*((RE2*K32/K22)*YK22(2)-YK32(2))))
*      -A(2)*((PI*K32/2)*((RE2*K32/K22)*J1K22*JOK32
*      -J1K32*JOK22))
      RETURN
      END

```

C
C
C

FUNCTION CFW(CW)

C ROLE: CALCUL DE L'EQUATION CARACTERISTIQUE COMPLEXE
C (5.4) DE LA CAVITE FERMEE AYANT DES BOUTS PARFAITEMENT
C CONDUCTEURS. L'EQUATION CARACTERISTIQUE EST EXPRIMEE
C EN FONCTION DE LA FREQUENCE DE RESONANCE COMPLEXE.
C IN
C CW: FREQUENCE DE RESONANCE COMPLEXE.
C OUT
C CFW: VALEUR DE L'EQUATION CARACTERISTIQUE (5.4)

```

      IMPLICIT COMPLEX(C,K,J,Y)
      REAL C
      DIMENSION CA(3),CB(3)
      COMMON/BCC/PI/BC1/M,H/BC2/R1,R2,RT,R3
*      /BC3/CE1/BC4/CE2/BC12/SIGMA
      W=REAL(CW)
      C=2.99792458E8
      UO=4*PI*1E-7
      EO=1/(C**2*UO)
      K33=CW/C*R3

```

C CALCUL DES FONCTIONS DE BESSEL ET DE
C NEUMANN.

```

      CALL JN(K33,J033,J133)
      Y033=CYN(K33,0,J033)
      Y133=CYN(K33,1,J133)
      J033=J033-CSQRT(-(0.0,1.0)*W*EO/SIGMA)*J133
      Y033=Y033-CSQRT(-(0.0,1.0)*W*EO/SIGMA)*Y133

```


C CALCUL DES FACTEURS D'AMPLITUDE DE LA CAVITE, EQUATIONS
C (2.72) ET (2.73).

CALL CANBN(CA,CB,CE1,CE2,CW)

C CALCUL DE L'EQUATION CARACTERISTIQUE (5.4).

CFW=CA(3)*JO33+CB(3)*YO33
RETURN
END

C
C
C

FUNCTION APPFW(RO)

C ROLE: CALCUL DE LA VALEUR APPROXIMATIVE DU ZERO
C COMPLEXE (LA FREQUENCE DE RESONANCE COMPLEXE) DE
C L'EQUATION CARACTERISTIQUE (5.4), DE LA MEME FACON
C QUE DANS L'EQUATION (5.14C).

C IN

C RO: VALEUR APPROCHEE DU ZERO COMPLEXE.

C OUT

C APPFW: VALEUR APPROXIMATIVE DU ZERO COMPLEXE.

COMPLEX RO,APPFW,CFW
DELTA=RO*1E-6

C CALCUL DE LA VALEUR APPROXIMATIVE DU ZERO COMPLEXE.

APPFW=RO-(DELTA/(CFW(RO+DELTA)/CFW(RO)-1))
RETURN
END

C
C
C

SUBROUTINE WCAVITE(CW,CE1,CE2,ENERC)

C ROLE: CALCULE L'ENERGIE EMMAGASINEE DANS LA CAVITE,
C EQUATION (5.25) OU (5.28).

C IN

C CW: FREQUENCE DE RESONANCE COMPLEXE MESUREE.

C CE1,CE2: PERMITTIVITE (VALEUR COMPLEXE) DES MILIEUX UN
C ET DEUX.

C OUT

C ENERC: L'ENERGIE EMMAGASINEE DANS LA CAVITE.

IMPLICIT COMPLEX(C,J,K,Z,Y)
REAL C
COMPLEX ENERC,CA(3),CB(3)
COMMON/BCC/PI,X0(10)/BC1/M,H/BC2/R1,R2,RT,R3
C=2.99792458E8

C ON CALCULE LES FACTEURS D'AMPLITUDE DE L'INTERIEUR DE
C LA CAVITE, EQUATIONS (2.72) ET (2.74).

```
CALL CANBN(CA,CB,CE1,CE2,CW)
K11=R1*CSQRT(CE1)*CW/C
K22=R2*CSQRT(CE2)*CW/C
K33=R3*CW/C
```

C CALCUL DES FONCTIONS DE BESSEL ET DE NEUMANN CONTENUES
C DANS L'EQUATION (5.25).

```
CALL JN(K11,J01,J11)
CALL JN(K22,J02,J12)
CALL JN(K33,J03,J13)
J11C=CONJG(J11)
Y02=CYN(K22,0,J02)
Y12=CYN(K22,1,J12)
Y13=CYN(K33,1,J13)
```

C CALCUL DES COMBINAISONS LINEAIRES Z02, Z12,Z13,Z12C
C CONTENUES DANS L'EQUATION (5.25) OU (5.28).

```
Z02=CA(2)*J02+CB(2)*Y02
Z12=CA(2)*J12+CB(2)*Y12
Z13=CA(3)*J13+CB(3)*Y13
Z12C=CONJG(Z12)
```

C SI LES PERMITTIVITES DES MILIEUX UN ET DEUX NE SONT
C PAS REELLES ALORS ON UTILISE L'EXPRESSION (5.25) POUR
C LE CALCUL DE L'ENERGIE.
C SINON ON UTILISE L'EXPRESSION (5.28) QUI CORRESPOND AU
C CAS REEL.

```
IF( (AIMAG(CE1).NE.0) .OR. (AIMAG(CE2).NE.0) ) THEN
  ENERC=C*PI*H*(0.0,1.0)*
  * R1*J11C*J01*CW*CSQRT(CONJG(CE1))*
  * (CE1/AIMAG(CE1*CW**2)
  * -CE2/AIMAG(CE2*CW**2))
  * +R2*Z12C*Z02*CW*CSQRT(CONJG(CE2))*
  * (CE2/AIMAG(CE2*CW**2)
  * -1/AIMAG(CW**2)))
ELSE
  ENERC=PI*H/2*((R3*Z13)**2+(CE1-CE2)*(R1*J01)**2
  * +(CE2-1)*(R2*Z02)**2)
END IF
RETURN
END
```

C
C
C

SUBROUTINE TRANSF(CINT1,CINT2,CENER)

```

C  ROLE:  CALCUL DE LA DEVIATION RELATIVE DE FREQUENCE DE
C  RESONANCE COMPLEXE PAR RAPPORT A LA CAVITE CONDUCTRICE
C  FERMEE AYANT DES BOUTS PARFAITEMENT CONDUCTEURS
C  (EQUATION (5.3)), ET ENSUITE CALCUL DE LA FREQUENCE DE
C  RESONANCE COMPLEXE D'UNE TELLE CAVITE.
C  IN
C  CINT1:  VALEUR DU 'MVU' DE L'EQUATION (5.29) RELATIVE
C           A LA DEVIATION DU FACTEUR DE QUALITE DUE AU
C           TUBE CONDUCTEUR.
C  CINT2:  VALEUR DE LA DOUBLE SOMMATION DE L'EQUATION
C           (5.24) RELATIVE A LA DEVIATION DE FREQUENCE DUE
C           AU TUBE D'INSERTION CONDUCTEUR.
C  CENER:  ENERGIE EMMAGASINEE DANS LA CAVITE, EQUATION
C           (2.115).
C  CW:     FREQUENCE DE RESONANCE OBTENUE DE LA CAVITE
C           CONDUCTRICE AYANT UN TUBE D'INSERTION CONDUCTEUR.
C  OUT
C  CW:     FREQUENCE DE RESONANCE COMPLEXE DE LA CAVITE
C           CONDUCTRICE FERMEE AYANT DES BOUTS PARFAITEMENT
C           CONDUCTEURS (EQUATION 5.3).

```

```

      IMPLICIT COMPLEX(C)
      REAL MMBSJO,MMBSJ1
      COMMON/BCC/PI,XO(10)/BC1/M,H/BC2/R1,R2,RT,R3
      * /BC3/CE1/BC4/CE2/BC5/CW/BC12/SIGMA
      UO=4*PI*1E-7
      W=REAL(CW)
      RE1=REAL(CE1)
      E1I=AIMAG(CE1)

```

```

C  CALCUL DE LA DEVIATON RELATIVE DE FREQUENCE DE
C  RESONANCE DUE AU TUBE D'INSERTION CONDUCTEUR, EQUATION
C  (5.24).

```

```

      DVT=REAL(CINT2)/(REAL(CENER*2))

```

```

C  CALCUL DE LA DEVIATION DE L'INVERSE DU FACTEUR DE
C  QUALITE DUE AU TUBE D'INSERTION CONDUCTEUR, EQUATION
C  (5.29).

```

```

      D1QT=(E1I*REAL(CINT1)*2)/(PI*H*(R3*MMBSJ1(XO(M)))*2)

```

```

C  CALCUL DE LA DEVIATION DE L'INVERSE DU FACTEUR DE
C  QUALITE DUE A LA CONDUCTIVITE DES PAROIS DU HAUT ET DU
C  BAS, EQUATION (5.42).

```

```

      D1QC=(-2/(H))/(SQRT(2*W*UO*SIGMA))

```

```

C  ON CALCULE LES DEVIATIONS TOTALES.

```

```

      DV=DVT
      D1Q=D1QT+D1QC

```

```

      PRINT *, 'DV=', DV, '    D1Q=', D1Q

C  CALCUL DE LA FREQUENCE DE RESONANCE DE LA CAVITE FERMEE
C  AYANT DES BOUTS PARFAITEMENT CONDUCTEURS.

      REW=REAL(CW)*(1-DV)
      AIMW=AIMAG(CW)+REAL(CW)*D1Q/2
      CW=CMPLX(REW,AIMW)
      PRINT *, 'CW=', CW
      RETURN
      END

C
C
C
      SUBROUTINE ZROREEL(F,X,PAS)

C  ROLE:  CHERCHE LE PREMIER ZERO DE F(X), PAR CHANGEMENT
C          DE SIGNE, EN PARTANT DE X ET ENSUITE EN AVANCANT
C          AVEC LE PAS CHOISI.
C  IN
C  F:  FONCTION DONT ON CHERCHE LE ZERO.
C  PAS:  PAS DE RECHERCHE.
C  X:  VALEUR DE DEPART.
C  OUT
C  X:  VALEUR DU ZERO DE F(X).
C  ON ASSIGNE LE SIGNE DE LA FONCTION F POUR LA VALEUR DE
C  DEPART  X.

      LOGICAL FPLUS,CHANGE
      IF(F(X).GT.0) THEN
        FPLUS=.TRUE.
      ELSE
        FPLUS=.FALSE.
      END IF
      CHANGE=.FALSE.

C  SI LA FONCTION F(X) N'A PAS CHANGE DE SIGNE, ALORS ON
C  AVANCE D'UN PAS.  SINON ON REVIENT AU X PRECEDENT ET ON
C  DIMINUE LE PAS DE MOITIE.

20  IF(.NOT.CHANGE) THEN
      X=X+PAS
    ELSE
      X=X-PAS
      PAS=PAS/2
    END IF

C  ON DETERMINE SI LE SIGNE DE F(X) A CHANGE.

      CALL SIGNE(F(X),CHANGE,FPLUS)

```

C LA RECHERCHE CESSE QUAND LE PAS RELATIF (PAS/X) EST
 C INFÉRIEUR A 1E-5. DE CETTE FAÇON NOUS AURONS CINQ
 C CHIFFRES SIGNIFICATIFS.

IF(ABS(PAS/X).GT.1E-5) GO TO 20
 RETURN
 END

C
 C
 C

SUBROUTINE SIGNE(X,CHANGE,PLUS)

C ROLE: DÉTERMINE SI X A CHANGÉ DE SIGNE.
 C IN
 C X: NOUVELLE VALEUR DE LA VARIABLE DONT ON VEUT SAVOIR
 C SI ELLE A CHANGÉ DE SIGNE.
 C PLUS: VALEUR LOGIQUE DU SIGNE DE L'ANCIENNE VALEUR DE
 C X.
 C OUT
 C CHANGE: VALEUR LOGIQUE DU CHANGEMENT DE SIGNE.

LOGICAL CHANGE,PLUS
 CHANGE=.FALSE.

C SI X EST NÉGATIF ET QU'IL ÉTAIT POSITIF LA DERNIÈRE FOIS,
 C ALORS IL A CHANGÉ DE SIGNE
 C SI X EST NUL, ALORS ON CONSIDÈRE QU'IL A CHANGÉ DE SIGNE
 C SI X EST POSITIF ET SI LA DERNIÈRE FOIS IL ÉTAIT NÉGATIF
 C ALORS IL A CHANGÉ DE SIGNE.

IF(X) 1,2,3
 1 IF(PLUS) CHANGE=.TRUE.
 GO TO 4
 2 CHANGE=.TRUE.
 GO TO 4
 3 IF(.NOT.PLUS) CHANGE=.TRUE.
 4 RETURN
 END

C
 C
 C

SUBROUTINE ZROCOMP(APPF,RO)

C ROLE: TROUVE LE ZERO COMPLEXE DE F(RO) PAR LA METHODE
 C DE NEWTON, OU APPF(RO) EST LA FONCTION QUI DONNE LA
 C VALEUR APPROXIMATIVE DE CE ZERO.
 C IN
 C RO: VALEUR APPROCHÉE DU ZERO COMPLEXE.
 C APPF: FONCTION QUI DONNE LA VALEUR APPROCHÉE DU ZERO
 C COMPLEXE F(RO). ELLE CORRESPOND A L'EQUATION
 C (5.13), SAUF QU'ICI F(RO) EST UNE FONCTION
 C QUELCONQUE DE L'UTILISATION CHOISIE.

```

C OUT
C RO: ZERO COMPLEXE DE F(RO).

      COMPLEX RO,CX,APPF

C ON TROUVE UNE VALEUR APPROXIMATIVE DU ZERO COMPLEXE A
C PARTIR DE LA VALEUR APPROCHEE RO.

      CX=APPF(RO)

C ON ENREGISTRE LES DIFFERENCES RELATIVE, REELLE ET
C IMAGINAIRE ENTRE LA VALEUR APPROCHEE RO ET LA VALEUR
C APPROXIMATIVE CX QUE NOUS VENONS DE CALCULER.

      AVANR=ABS(REAL(CX-RO)/REAL(CX))
      AVANI=ABS(AIMAG(CX-RO)/REAL(CX))

C LORSQU'ON CALCULE UNE NOUVELLE VALEUR APPROXIMATIVE DE
C CX, LES NOUVELLES DIFFERENCES RELATIVES SONT
C ENREGISTREES DANS LES VARIABLES PASR ET PASI.

10    PASR=ABS(REAL(CX-RO)/REAL(CX))
      PASI=ABS(AIMAG(CX-RO)/REAL(CX))

C LA RECHERCHE SE TERMINE LORSQUE LES DIFFERENCES
C RELATIVE, REELLE ET IMAGINAIRE SONT INFERIEURES A 1E-5.
C AINSI NOUS AURONS CINQ CHIFFRES SIGNIFICATIFS POUR LA
C PARTIE REELLE ET UNE PRECISION DE (REEL(CX) X 1XE-5 )
C SUR LA PARTIE IMAGINAIRE.

      IF((PASR.GT.1E-5).OR.(PASI.GT.1E-5)) THEN

C SI LES DIFFERENCES RELATIVES, REELLE ET IMAGINAIRE
C ENTRE LA VALEUR APPROCHEE RO ET LA VALEUR IMAGINAIRE
C APPROXIMATIVE CX ONT AUGMENTE, ALORS LA METHODE DE
C NEWTON DIVERGE. ON A DECIDE POUR CE CAS D'ARRETER LE
C PROGRAMME, C'EST-A-DIRE DE TERMINER ICI.

      IF((AVANR.LT.PASR).AND.(AVANI.LT.PASI)) THEN
        PRINT *, 'CA DIVERGE'
        STOP
      ELSE

C SINON ON ENREGISTRE LES DIFFERENCES RELATIVES ENTRE LA
C VALEUR APPROCHEE RO ET LA VALEUR APPROXIMATIVE CX QU'ON
C VIENT DE CALCULER DANS LES VARIABLES AVANR ET AVANI.
C ENSUITE, LE CX DEVIENT LA NOUVELLE VALEUR APPROXIMATIVE
C CX.

      AVANR=ABS(REAL(CX-RO))
      AVANI=ABS(AIMAG(CX-RO))

```

```

        RO=CX
        CX=APPF(RO)
    END IF
    GO TO 10
ELSE
    RO=CX
END IF
RETURN
END

C
C
C
C
    FUNCTION CYN(Z,N,JNZ)

C  ROLE: EVALUER LA FONCTION DE NEUMANN D'ORDRE ENTIER
C          YN(Z)
C  IN
C  Z:  ARGUMENT DE LA FONCTION DE NEUMANN.
C  N:  ORDRE DE LA FONCTION DE NEUMANN.
C  JNZ: VALEUR DE LA FONCTION DE BESSEL D'ORDRE N
C          ET D'ARGUMENT Z.
C  OUT
C  CYN:  FONCTION DE NEUMANN D'ORDRE N ET D'ARGUMENT Z.

        COMPLEX  A,B,C,C1,D,Z,CYN,JNZ,TETA,QN,PN,SOMP,SOMQ

        EULER=0.5772156649
        PI=3.141592654

C  INITIALISATION.

        B=(0.0,0.0)
        C=(0.0,0.0)
        D=(1.0,0.0)

C  SI LA NORME DE L'ARGUMENT EST PLUS GRANDE QUE 11 NOUS
C  UTILISONS LE DEVELOPPEMENT ASYMPTOTIQUE DONNE A
C  L'EQUATION (A.39).
C  SI LA NORME DE L'ARGUMENT EST INFERIEUR A 11 NOUS
C  UTILISONS LE DEVELOPPEMENT EN SERIE ENTIERE DONNE A
C  L'EQUATION (A.3).

        IF(CABS(Z).GT.11) GO TO 30

C  A:  EST LE PREMIER TERME DE L'EQUATION (A.3).

        A=(2/PI)*(CLOG(Z/2)+EULER)*JNZ
        IF(N.NE.0) THEN

C  CETTE BOUCLE CALCULE LE PREMIERE SOMMATION DE L'EQUATION
C  (A.3) LAQUELLE EST ENREGISTREE DANS LA VARIABLE B.

```

```

DO 10 I=0,N-1
      B=B+(-1/PI)*(FACT(N-I-1)/FACT(I))*((Z/2)**(2*I-N))
10  CONTINUE
      ELSE
      END IF

```

C LA BOUCLE "TANT QUE" CALCULE LA DEUXIEME SOMMATION DE
 C L'EQUATION (A.3). LA SOMMATION SE TERMINE LORSQUE LE
 C NOMBRE DE TERMES EST SUPERIEUR A 75, OU LORSQUE LA
 C DIFFERENCE ENTRE LES DEUX DERNIERS TERMES EST
 C INFERIEURE A 1E-8. (C'EST UNE SERIE ALTERNEE).

```

      K=0
      IF(N.EQ.0) K=1
C  TANT QUE
20  IF((CABS(D).GT.1E-8).AND.(K.LT.75)) THEN
      C1=C

```

C PHI: EST DONNE PAR L'EQUATION (A.4).
 C FACT(K): EST LA FACTORIELLE DE K.

```

      C=C+(-1/PI)*((-1)**K)*(PHI(K)+PHI(N+K))*
*      ((Z/2)**((2*K)+N))/(FACT(K)*FACT(N+K))
      D=C-C1
      K=K+1
      GO TO 20
      ELSE
      END IF
C  TANT QUE
      CYN=A+B+C
50  IF(K.GE.75) THEN
      PRINT *, 'DANS CYN D EST GT 1E-8 D=',D
      ELSE
      END IF
      RETURN

```

C TETA: EST LE PHI DE L'EQUATION (A.40).

```

30  TETA=Z-(N+0.5)*PI/2

```

C INITIALISATION.

```

      K=1
      PAR=1.0
      SOMP=(1.0,0.0)
      SOMQ=(0.0,0.0)
      QN=(0.0,0.0)
      PN=(0.0,0.0)

```

C CALCUL DES QN ET PN DES EQUATIONS (A.41) ET (A.42).


```

300      IF(K.LE.30) THEN
          PAR=PAR*(4*N**2-(2*K-1)**2)
          QN=(-1)**(K/2)*
*          (PAR/(FACT(K)*(8*Z)**K))
          K=K+1
          PAR=PAR*(4*N**2-(2*K-1)**2)
          PN=(-1)**(K/2)*
*          (PAR/(FACT(K)*(8*Z)**K))
          IF((CABS(PN).LT.1E-10).AND.(CABS(QN).LT.1E-10))
*                                     GO TO 40
          SOMP=SOMP+PN
          SOMQ=SOMQ+QN
          K=K+1
          GO TO 300
      ELSE
          PRINT *, 'PLUS DE QUINZE TERMES DANS CYN'
      END IF

C  CALCUL DE LA FONCTION DE NEUMANN PAR L'EQUATION (A.39).
40      CYN=CSQRT(2/(PI*Z))*(SOMP*CSIN(TETA)+SOMQ*CCOS(TETA))
      RETURN
      END

C
C
C
      FUNCTION PHI(K)

C  ROLE:  CALCUL DE LA FONCTION CHI DE L'EQUATION (A.4).
C  IN
C  K:  ARGUMENT DE LA FONCTON CHI.
C  OUT
C  PHI:  EST LA VALEUR DE LA FONCTION CHI POUR UN ARGUMENT
C        DE K.

          IF(K.EQ.0) THEN
              PHI=0
              RETURN
          ELSE
              END IF
              PHI=0
              DO 10 I=1,K
                  PHI=PHI+(1.0/I)
10      CONTINUE
          RETURN
          END

C
C
C
      FUNCTION FACT(K)

```

```

C  ROLE:  CALCUL DE FACTORIELLE K
C  IN
C  K:  NOMBRE ENTIER DONT ON VEUT CALCULER LA FACTORIELLE.
C  OUT
C  FACT:  EST LA VALEUR DE FACTORIELLE K.
          FACT=1.0
          IF(K.EQ.0) RETURN
          DO 10 J=1,K
              FACT=FACT*J
10      CONTINUE
          RETURN
          END

C
C
C
          FUNCTION FE1(RE1)

C  ROLE:  CALCUL DE L'EQUATION CARACTERISTIQUE REELLE DE LA
C  CAVITE FERMEE AYANT DES BOUTS PARFAITEMENT CONDUCTEURS
C  (EQUATION 5.4). PAR EQUATION REELLE ON SOUS-ENTEND
C  L'EQUATION DANS LAQUELLE TOUTES LES QUANTITES
C  IMPLIQUEES SONT REELLES. L'EQUATION CARACTERISTIQUE
C  EST EXPRIMEE COMME UNE FONCTION DE LA PERMITTIVITE DU
C  DIELECTRIQUE QUI EST PLACE AU CENTRE DE LA CAVITE.
C  IN
C  RE1:  PERMITTIVITE REELLE DE L'ECHANTILLON QUI EST PLACE
C         AU CENTRE DE LA CAVITE.
C  ABW1:  CORRESPOND AU DENOMINATEUR ENTRE PARENTHESES DU
C         DERNIER TERME DE L'EQUATION CARACTERISTIQUE
C         ( 5 . 4 )
C  ABW2:  CORRESPOND AU NUMERATEUR ENTRE PARENTHESES DU
C         DERNIER TERME DE L'EQUATION CARACTERISTIQUE
C         ( 5 . 4 ) .
C  ABW1 ET ABW2 SONT DES CONSTANTES POUR UNE PERMITTIVITE
C  DU MILIEU DEUX ET UNE FREQUENCE DE RESONANCE DONNE.
C  OUT
C  FE1:  VALEUR DE L'EQUATION CARACTERISTIQUE REELLE
C         CORRESPONDANT A L'EQUATION (5.4)

          REAL K11,MMBSJO,MMBSJ1
          COMPLEX CE2,CW
          COMMON/BCC/PI/BC1/M,P,H/BC2/R1,R2,RT,R3
          * /BC4/CE2/BC5/CW/BC6/ABW1,ABW2

C  CW:  FREQUENCE DE RESONANCE COMPLEXE.
C  CE2:  PERMITTIVITE SOUS FORME COMPLEXE DU TUBE
C         CAPILLAIRE.

          RE2=REAL(CE2)
          W=REAL(CW)
          C=2.99792458E8
          K11=W/C*RE1*R1

```

C MMBSJO, MMBSJ1: SONT LES FONCTIONS DE BESSEL
 C D'ARGUMENT REEL D'ORDRE ZERO ET UN RESPECTIVEMENT.
 C DISPONIBLE EN LIBRAIRIE I.M.S.L.

```

      FE1=SQRT(RE1/RE2)*MMBSJ1(K11,IER)*ABW1+MMBSJO(K11,IER)
      *
      RETURN
      END

```

C
 C
 C

FUNCTION CFE1(CE1)

C ROLE: CALCUL DE L'EQUATION CARACTERISTIQUE COMPLEXE DE
 C LA CAVITE FERME AYANT DES BOUTS PARFAITEMENT
 C CONDUCTEURS (EQUATION (5.14)). L'EQUATION
 C CARACTERISTIQUE EST EXPRIMEE COMME UNE FONCTION
 C DE LA PERMITTIVITE DU MILIEU UN.
 C IN
 C CE1: PERMITTIVITE (VALEUR COMPLEXE) DU MILIEU UN.
 C OUT
 C CFE1: VALEUR DE L'EQUATION CARACTERISTIQUE (5.14).

```

      IMPLICIT COMPLEX(C,K,J)
      COMMON/BCC/PI/BC1/M,P,H/BC2/R1,R2,RT,R3
      * /BC4/CE2/BC5/CW/BC7/CABW1,CABW2
      K11=CSQRT(CE1)*CW/2.998E8*R1

```

C CALCUL DES FONCTIONS DE BESSEL D'ARGUMENT COMPLEXE K11
 C D'ORDRE ZERO ET UN.

```

      CALL JN(K11,JO11,J111)

```

C CABW1 CORRESPOND AU DENOMINATEUR ENTRE PARENTHESES DU
 C DERNIER TERME DE L'EQUATION CARACTERISTIQUE (5.4).
 C CABW2 CORRESPOND AU NUMERATEUR ENTRE PARENTHESES DU
 C DERNIER TERME DE L'EQUATION CARACTERISTIQUE (5.4).
 C CABW1 ET CABW2 SONT DES CONSTANTES POUR UNE
 C PERMITTIVITE DU MILIEU DEUX ET UNE FREQUENCE DE
 C RESONANCE DONNEE.

```

      CFE1=CSQRT(CE1/CE2)*J111*CABW1+JO11*CABW2
      RETURN
      END

```

C
 C
 C

SUBROUTINE CTEW(W,RE2)

C ROLE: CALCUL DU DENOMINATEUR ET NUMERATEUR ENTRE
 C PARENTHESES DU DERNIER TERME DE L'EQUATION

```

C          CARACTERISTIQUE REELLE CORRESPONDANT A
C          L'EQUATION (5.4). (CONDUCTIVITE INFINIE,
C          PERMITTIVITE REELLE ET FREQUENCE DE RESONANCE
C          REELLE).
C IN
C W:  FREQUENCE DE RESONANCE REELLE.
C RE2: PARTIE REELLE DE LA PERMITTIVITE DU MILIEU DEUX.
C OUT
C ABW1: DENOMINATEUR QUE NOUS VOULONS CALCULER.
C ABW2: NUMERATEUR QUE NOUS VOULONS CALCULER.

```

```

      REAL K21,K22,K32,K33,YK22(2),YK32(2),YK33(2),YK21(2)
      REAL MMBSJO,MMBSJ1
      COMMON/BCC/PI/BC1/M,H/BC2/R1,R2,RT,R3/BC6/ABW1,ABW2
      C=2.99792458E8

```

```

C  CALCUL DES NOMBRES D'ONDES (EQUATIONS 5.10A).

```

```

      K21=SQRT(RE2)*W/C*R1
      K22=SQRT(RE2)*W/C*R2
      K32=W/C*R2
      K33=W/C*R3

```

```

C  CALCUL DES FONCTIONS DE NEUMANN D'ARGUMENT REEL K21,
C  K22,K32,K33, D'ORDRE ZERO ET UN.

```

```

      CALL MMBSYN(K21,0.0,2,YK21,IER)
      CALL MMBSYN(K22,0.0,2,YK22,IER)
      CALL MMBSYN(K32,0.0,2,YK32,IER)
      CALL MMBSYN(K33,0.0,2,YK33,IER)

```

```

C  ALPHA: CORRESPOND A L'EQUATION (5.5).
C  BETA:  CORRESPOND A L'EQUATION (5.6).

```

```

      ALPHA=(MMBSJO(K22,IER)*(-MMBSJO(K33,IER)*YK32(2)
*      +YK33(1)*MMBSJ1(K32,IER))
*      +(RE2*K32/K22)*MMBSJ1(K22,IER)*
*      (MMBSJO(K33,IER)*YK32(1)-YK33(1)*MMBSJO(K32,IER)))
      BETA=(YK22(1)*(-MMBSJO(K33,IER)*YK32(2)
*      +YK33(1)*MMBSJ1(K32,IER))
*      +(RE2*K32/K22)*YK22(2)*
*      (MMBSJO(K33,IER)*YK32(1)-YK33(1)*MMBSJO(K32,IER)))
      ABW2=(MMBSJ1(K21,IER)*BETA-YK21(2)*ALPHA)
      ABW1=(YK21(1)*ALPHA-MMBSJO(K21,IER)*BETA)
      RETURN
      END

```

```

C
C
C

```

```

      SUBROUTINE CTECW(CW,CE2)

```

```

C  ROLE:  CALCUL DU DENOMINATEUR ET NUMERATEUR ENTRE

```

```

C          PARENTHESES DU DERNIER TERME DE L'EQUATION
C          CARACTERISTIQUE (COMPLEXE) (5.4).
C IN
C CW:  FREQUENCE DE RESONANCE COMPLEXE
C CE2:  PERMITTIVITE (VALEUR COMPLEXE) DU MILIEU DEUX.
C OUT
C CABW1:  DENOMINATEUR QUE NOUS VOULONS CALCULER.
C CABW2:  NUMERATEUR QUE NOUS VOULONS CALCULER.

      IMPLICIT COMPLEX(C,K,J,Y)
      REAL C
      COMPLEX ALPHA,BETA
      COMMON/BCC/PI/BC1/M,P,H/BC2/R1,R2,RT,R3
      * /BC7/CABW1,CABW2/BC12/SIGMA
      C=2.99792458E8
      UO=4*PI*1E-7
      EO=1/(C**2*UO)
      W=REAL(CW)

C  CALCUL DES NOMBRES D'ONDES (EQUATION 5.10A).

      K21=CSQRT(CE2)*CW/C*R1
      K22=CSQRT(CE2)*CW/C*R2
      K32=CW/C*R2
      K33=CW/C*R3

C  CALCUL DES FONCTIONS DE BESSEL ET DE NEUMANN D'ARGUMENT
C  COMPLEXE K21,K22,K32,K33 D'ORDRE ZERO ET UN.

      CALL JN(K21,J021,J121)
      CALL JN(K22,J022,J122)
      CALL JN(K33,J033,J133)
      CALL JN(K32,J032,J132)
      Y021=CYN(K21,0,J021)
      Y121=CYN(K21,1,J121)
      Y022=CYN(K22,0,J022)
      Y122=CYN(K22,1,J122)
      Y032=CYN(K32,0,J032)
      Y132=CYN(K32,1,J132)
      Y033=CYN(K33,0,J033)
      Y133=CYN(K33,1,J133)

C  J033:  CORRESPOND AU TAU (GREC) DE L'EQUATION (5.7).
C  Y033:  CORRESPOND AU PSI DE L'EQUATION (5.8).
C  ALPHA:  CORRESPOND A L'EQUATION (5.5).
C  BETA:  CORRESPOND A L'EQUATION (5.6).

      J033=J033-CSQRT(-(0.0,1.0)*W*EO/SIGMA)*J133

      Y033=Y033-CSQRT(-(0.0,1.0)*W*EO/SIGMA)*Y133

      ALPHA=(J022*(Y033*J132-J033*Y132)

```

```

      *      +(CE2*K32/K22)*J122*
      *      (J033*Y032-Y033*J032))
      BETA=(Y022*(Y033*J132-J033*Y132)
      *      +(CE2*K32/K22)*Y122*
      *      (J033*Y032-Y033*J032))
      CABW2=(J121*BETA-Y121*ALPHA)
      CABW1=(Y021*ALPHA-J021*BETA)
      RETURN
      END
C
C
C
      FUNCTION ARGR(Z)

C  ROLE:  CALCUL DE LA PARTIE REELLE DE L'INTEGRANT DE
C          L'INTEGRALE (5.26).
C  IN
C  KM,KN:  SONT LES VALEURS DES NOMBRES D'ONDES KOU ET
C          KOV.
C  Z:  VALEUR DE Z DANS L'EQUATION (5.26).
C  OUT
C  ARGR:  VALEUR DE LA PARTIE REELLE DE L'INTEGRANT DE
C          L'INTEGRALE (5.26).

      REAL ARGR
      COMPLEX KM,KNC,ARG
      COMMON/BCA/KM,KNC

C  ON SAIT QUE COSH(Z) = COS( (0.0,1.0)*Z ).

      ARG=1/(CCOS((0.0,1.0)*KM*Z)*CCOS((0.0,1.0)*KNC*Z))
      ARGR=REAL(ARG)
      RETURN
      END
C
C
C
      FUNCTION ARG1(Z)

C  ROLE:  CALCUL LA PARTIE IMAGINAIRE DE L'INTEGRANT DE
C          L'INTEGRALE (5.26).
C  IN
C  KM,KN:  SONT LES VALEURS DES NOMBRES D'ONDES KOU ET
C          KOV.
C  Z:  VALEUR DE Z DANS L'EQUATION (5.26).
C  OUT
C  ARG1:  EST LA VALEUR DE LA PARTIE IMAGINAIRE DE
C          L'INTEGRANT DE L'INTEGRALE (5.26).

      REAL ARG1
      COMPLEX KM,KNC,ARG
      COMMON/BLOCA/KM,KNC

```

```

ARG=1/(CCOS((0.0,1.0)*KM*Z)*CCOS((0.0,1.0)*KNC*Z))
ARGI=AIMAG(ARG)
RETURN
END

C
C
C
SUBROUTINE JN(Z,JOZ,J1Z)

C ROLE:  CALCUL DES FONCTIONS DE BESSEL D'ARGUMENT
C         COMPLEXE Z D'ORDRE ZERO ET UN.
C IN
C Z:  ARGUMENT COMPLEXE.
C OUT
C JOZ:  FONCTION DE BESSEL D'ARGUMENT Z D'ORDRE ZERO.
C J1Z:  FONCTION DE BESSEL D'ARGUMENT Z D'ORDRE UN.

REAL JZR(2),JZI(2)
COMPLEX Z,JOZ,J1Z

C CALCUL DES FONCTIONS DE BESSEL D'ORDRE ZERO ET UN PAR
C LA SOUS-ROUTINE MMBZJN DISPONIBLE EN LIBRAIRIE
C I.M.S.L.

CALL MMBZJN(REAL(Z),AIMAG(Z),2,JZR,JZI,IER)
JOZ=CMPLX(JZR(1),JZI(1))
J1Z=CMPLX(JZR(2),JZI(2))
RETURN
END

C
C
C
FUNCTION FKN(KN)

C ROLE:  CALCUL DE L'EQUATION CARACTERISTIQUE REELLE
C         (5.15). PAR EQUATION REELLE, ON SOUS-ENTEND
C         L'EQUATION DANS LAQUELLE TOUS LES ARGUMENTS
C         IMPLIQUES SONT REELS.
C IN
C KN:  NOMBRE D'ONDES REEL DE L'INTERIEUR DU TUBE
C         CONDUCTEUR.
C CE1,CE2:  SONT LES PERMITTIVITES DES MILIEUX UN ET
C         DEUX.
C OUT
C FKN:  VALEUR DE L'EQUATION CARACTERISTIQUE REELLE
C         (5.15).

IMPLICIT REAL(K)
REAL AU(2),BU(2),MMBSJO,MMBSJ1,YKN1(2),YKN2(2),YKNT(2)
COMPLEX CE1,CE2
COMMON/BCC/PI/BC2/R1,R2,RT,R3/BC3/CE1/BC4/CE2
RE1=REAL(CE1)

```

```

RE2=REAL(CE2)
KN1=KN*R1
KN2=KN*R2
KNT=KN*RT

C CALCUL DES FONCTIONS DE NEUMANN D'ARGUMENT REEL KN1 ET
C KN2 D'ORDRE ZERO ET UN.

CALL MMBSYN(KN1,0.0,2,YKN1,IER)
CALL MMBSYN(KN2,0.0,2,YKN2,IER)

C CALCUL DES FACTEURS D'AMPLITUDE DU DEUXIEME MILIEU DE
C L'INTERIEUR DU TUBE CONDUCTEUR (EQUATION (5.51) ET
C (5.52).

AU(2)=1+PI*KN1*YKN1(1)*MMBSJ1(KN1,IER)*(RE1/RE2-1)/2
BU(2)=PI*KN1*MMBSJO(KN1,IER)*MMBSJ1(KN1,IER)
*                                     *(1-RE1/RE2)/2

C SI DEUX DIELECTRIQUE SEULEMENT SE TROUVENT DANS LE
C CONDUCTEUR (L'AIR EST UN DIELECTRIQUE) ALORS ON UTILISE
C L'EQUATION CARACTERISTIQUE CORRESPONDANTE (4.27).
C SINON ON UTILISE L'EQUATION CARACTERISTIQUE (4.27) MAIS
C AVEC LES CHANGEMENTS DES EQUATIONS (4.28A) ET (4.28B).

IF( (R2.EQ.RT) .OR. (RE2.EQ.1)) THEN
    FKN=AU(2)*MMBSJO(KN2,IER)+BU(2)*YKN2(1)
ELSE
    CALL MMBSYN(KNT,0.0,2,YKNT,IER)
    FKN=(AU(2)*MMBSJO(KNT,IER)+BU(2)*YKNT(1))+PI*KN2
*                                     *(RE2-1)/2
*   *(MMBSJO(KNT,IER)*YKN2(1)-YKNT(1)*MMBSJO(KN2,IER))
*   *(AU(2)*MMBSJ1(KN2,IER)+BU(2)*YKN2(2))
END IF
RETURN
END

FUNCTION APPFKN(KN)

C ROLE: CALCULER LA VALEUR APPROXIMATIVE DU ZERO
C COMPLEXE DE L'EQUATION CARACTERISTIQUE FKN(KN)
C (EQUATION (5.15)) DE L'INTERIEUR DU TUBE
C CONDUCTEUR A PARTIR DE LA VALEUR APPROCHEE KN,
C DE LA MEME FACON QUE DANS L'EQUATION (5.13).
C LA DERIVEE DE L'EQUATION CARACTERISTIQUE A ETE
C CALCULE EXPLICITEMENT (VOIR EQUATIONS (5.48) A
C (5.57))
```



```

IMPLICIT COMPLEX(A,B,C,D,J,K,Y)
COMMON/BCC/PI/BC2/R1,R2,RT,R3/BC3/CE1/BC4/CE2
KN1=KN*R1
KN2=KN*R2
KNT=KN*RT

```

```

C CALCULE LES FONCTIONS DE BESSEL ET DE NEUMANN D'ARGUMENT
C COMPLEXE KN1,KN2, KNT, D'ORDRE ZERO ET UN.

```

```

CALL JN(KN1,J01,J11)
CALL JN(KN2,J02,J12)
CALL JN(KNT,J0T,J1T)
Y01=CYN(KN1,0,J01)
Y11=CYN(KN1,1,J11)
Y02=CYN(KN2,0,J02)
Y12=CYN(KN2,1,J12)
Y0T=CYN(KNT,0,J0T)
Y1T=CYN(KNT,1,J1T)

```

```

C CALCULE LES FACTEURS D'AMPLITUDE DES MILIEUX DEUX ET
C TROIS DE L'INTERIEUR DU TUBE CONDUCTEUR (EQUATION
C (5.49) A (5.52)).

```

```

AU2=1+PI*KN1*(Y01*J11*(CE1/CE2-1))/2
BU2=-PI*KN1*(J01*J11*(CE1/CE2-1))/2
AU3=AU2*(1+PI*KN2*Y02*J12*(CE2-1)/2)
*   +BU2*(PI*KN2*Y02*Y12*(CE2-1)/2)
BU3=BU2*(1-PI*KN2*J02*Y12*(CE2-1)/2)
*   -AU2*(PI*KN2*J12*J02*(CE2-1)/2)

```

```

C CALCUL LES DERIVEES PAR RAPPORT AU NOMBRE D'ONDES DES
C FACTEURS D'AMPLITUDES DES MILIEUX DEUX ET TROIS DE
C L'INTERIEUR DU TUBE CONDUCTEUR EQUATIONS (5.54) A
C (5.57)

```

```

DAU2=PI*KN1*R1*(J01*Y01-Y11*J11)*(CE1/CE2-1)/2
DBU2=PI*KN1*R1*(J11**2-J01**2)*(CE1/CE2-1)/2
DAU3=DAU2+PI*KN2*(CE2-1)/2*
*   (Y02*(DAU2*J12+DBU2*Y12)+R2*((Y02*J02-J12*Y12)*AU2
*   +(Y02**2-Y12**2)*BU2))
DBU3=DBU2+PI*KN2*(CE2-1)/2*
*   (-J02*(DBU2*Y12+DAU2*J12)-R2*((J02*Y02-J12*Y12)*BU2
*   +(J02**2-J12**2)*AU2))

```

```

C CALCULE L'EQUATION CARACTERISTIQUE (COMPLEXE) (5.15)
C AINSI QUE SA DERIVEE PAR RAPPORT AU NOMBRE D'ONDES KN
C (5.53).

```

```

CFN=AU3*J0T+BU3*Y0T
DFKN=-(AU3*J1T+BU3*Y1T)*RT
*   +(DAU3*J0T+DBU3*Y0T)

```

C CALCULE LA VALEUR APPROXIMATIVE DU ZERO COMPLEXE DE LA
C MEME FACON QUE DANS L'EQUATION (5.13).

APPFKN=KN-CFN/DFKN
RETURN
END

ANNEXE D

Programme CORRCD

Cette annexe donne le programme informatique qui calcule les coefficients de corrections "C" et "D" des équations (4.101) et (4.97).

```
PROGRAM CORRCD(IN2,IN1,IN3,TAPE1=IN1,TAPE2=IN2,TAPE3=IN3)

C      MODE TM(0,M,0)  E4=E3=EVIDE M<11                      R1.NE.O

C LE PROGRAMME CORRCD CALCULE LES COEFFICIENTS DE
C CORRECTIONS "C" ET "D" (EQUATIONS (4.98) ET 4.101)),
C ENSUITE IL CALCULE LES VALEURS CORRIGÉES DES PARTIES
C IMAGINAIRES ET REELLES DE LA PERMITTIVITE DU MILIEU UN.

C LES FICHIERS D'ENTREES IN1,IN2 ET IN3 AINSI QUE LES
C SOUS-PROGRAMMES SONT LES MEMES QUE POUR LE PROGRAMME
C PRINCIPAL PERMI DE L'ANNEXE C.

      IMPLICIT COMPLEX(A,C)
      EXTERNAL FW,APFW,FE1,APFE1,FE2,APFE2,FKN,APFKN
      REAL KN,K(20)
      COMPLEX CKN(20),CN(20),RO,ENERC
      LOGICAL SEEKCW,SEEKCE2,DEUXBOU,SEEKCE1
      COMMON/BCC/PI,XO(10)/BC1/M,H/BC2/R1,R2,RT,R3
      * /BC14/NBMODE
      * /BC3/CE1/BC4/CE2/BC5/CW

C XO(10): SONT LES DIX PREMIERS ZEROS DE LA FONCTION DE
C BESSEL D'ORDRE ZERO

      DATA XO/2.4048255577,5.5200781103,8.6537279129
      * ,11.7915344390
      * ,14.9309177085,18.0710639679,21.2116366299
      * ,24.3524715308,27.4934791320,30.6346064684/
      PI=3.141592654
```

C=2.99792458E8

C 1- LIT LES PARAMETRES DE DEPART DU PROGRAMME
 C 2- CALCULE LES PARAMETRES DE DEPART, LE RAYON DU CORPS
 C PRINCIPAL DE LA CAVITE, LA CONDUCTIVITE DES PAROIS ET
 C ENSUITE LES IMPRIME AVEC LES PARAMETRES DE DEPART
 C DU PROGRAMME.

CALL INPUT(SEEKCE1,SEEKCE2,SEEKCW,CE1,CE2,CW)

C DETERMINATION DE LA FREQUENCE DE RESONANCE COMPLEXE

C ON COMMENCE LA RECHERCHE REELLE A PARTIR DE LA FREQUENCE
 C DE RESONANCE DE LA CAVITE VIDE AVEC UN PAS NEGATIF 250
 C FOIS PLUS PETIT. LE PAS EST NEGATIF CAR LA FREQUENCE
 C DIMINUE LORSQU'ON INSERE L'ECHANTILLON.

W=C*X0(M)/R3
 PAS=-W/250

C ON EFFECTUE LA RECHERCHE REELLE PAR CHANGEMENT DE
 C SIGNE DU ZERO DE L'EQUATION CARACTERISTIQUE (5.4) DONT
 C LA SEULE INCONNUE EST LA FREQUENCE.

CALL ZROREEL(FW,W,PAS)
 CW=CMPLX(W,0.0)

C PARTANT DU ZERO REEL QU'ON A TRANSFORME EN VALEUR
 C COMPLEXE, ON CHERCHE LE ZERO COMPLEXE DE L'EQUATION
 C CARACTERISTIQUE (5.4) PAR LA METHODE DE NEWTON. APPFW
 C EST UNE FONCTION QUI DONNE LA VALEUR APPROXIMATIVE DU
 C ZERO COMPLEXE, DE LA MEME FACON QUE DANS L'EQUATION
 C (5.13).

CALL ZROCOMP(APPFW,CW)
 PRINT*, 'CW=', CW

C IL Y A DEUX DEVIATIONS DE FREQUENCE A CALCULER DANS
 C L'EQUATION (4.101), PAR CONSEQUENT ON DEVRA EFFECTUER
 C DES OPERATIONS SIMILAIRES DEUX FOIS.
 C DEUXBOU: VARIABLE LOGIQUE DISANT SI ON A CALCULE CES
 C DEUX DEVIATIONS DE FREQUENCE

DEUXBOU=.FALSE.

C DETERMINATION DES N PREMIERS NOMBRES D'ONDES
 C DE L'INTERIEUR DU TUBE CONDUCTEUR (N=NBMODE).

100 CONTINUE

C LA RECHERCHE REELLE DEBUTE AU VINGTIEME DU PREMIER
 C NOMBRE D'ONDES DU TUBE CONDUCTEUR ET ON PREND UN PAS

C EGAL AU CINQUIEME DE CE MEME NOMBRE D'ONDES

```
KN=XO(1)/(20*RT)
DO 10 I=1,NBMODE
  PAS=XO(1)/(5*RT)
```

ON EFFECTUE LA RECHERCHE DU ZERO REEL, PAR CHANGEMENT DE SIGNE DE L'EQUATION CARACTERISTIQUE (5.15).

```
CALL ZROREEL(FKN,KN,PAS)
K(I)=KN
RO=CMPLX(K(I),0.0)
```

C ON TROUVE LE ZERO COMPLEXE PAR LA METHODE DE NEWTON
C APPFKN EST LA FONCTION QUI DONNE LA VALEUR
C APPROXIMATIVE DU ZERO COMPLEXE DE L'EQUATION
C CARACTERISTIQUE (5.13).

```
CALL ZROCOMP(APPFKN,RO)
```

C ON AVANCE ARBITRAIREMENT D'UN VINGTIEME DE LA VALEUR DU
C PREMIER NOMBRE D'ONDES, DE FACON A POUVOIR CHERCHER LE
C PROCHAIN ZERO DE LA MEME MANIERE.

```
CKN(I)=RO
KN=KN+(XO(1)/(20*RT))
10 CONTINUE
```

C CALCUL DES FONCTIONS DE BESSEL ET DE SES CONJUGUEES,
C AINSI QUE LES COMBINAISONS LINEAIRES "P" DEFINIES DANS
C L'EQUATION (4.35)

```
CALL BESABP(CKN,NBMODE)
```

C CALCUL DES FACTEURS D'AMPLITUDE DU CENTRE DU TUBE
C D'INSERTION CONDUCTEUR, EQUATION (5.34)

```
CALL COEFC(CKN,CN,NBMODE,CE1,CE2)
```

C CALCUL DU "M" DE L'EQUATION (5.30) (M=CINTQ).

```
CALL CALCUL1(CINTQ,CKN,CN,NBMODE)
```

C CALCUL DU CHANGEMENT D'ENERGIE POUR PASSER DE LA CAVITE
C AYANT UN TUBE D'INSERTION CONDUCTEUR A LA CAVITE
C FERMEE.

```
CALL CALCUL2(CINTV,CKN,CN,NBMODE)
```

C SI LES QUANTITES PRECEDENTES ONT AUSSI ETE CALCULEES
C POUR LA CAVITE SANS L'ECHANTILLON, NOUS ALLONS A
C L'ETIQUETTE 200.

```

      IF(DEUXBOU) GO TO 200

C NOUS ENREGISTRONS LA VALEUR DE LA PERMITTIVITE DU
C MILIEU UN, AINSI QUE LES VALEURS DE CINTV ET CINTQ
C QU'ON A CALCULEES POUR LA CAVITE CONTENANT
C L'ECHANTILLON (MILIEU UN POUR CE PROGRAMME).

      CINT2=CINTV
      CINT1=CINTQ
      CME1=CE1
      CE1=(1.0,0.0)
      DEUXBOU=.TRUE.
      GO TO 100

C CALCUL DE L'ENERGIE EMMAGASINEE DANS LA CAVITE
C CONTENANT L'ECHANTILLON, EQUATION (5.25) OU (5.28).

200      CE1=CME1
      CALL WCAVITE(CW,CE1,CE2,ENERC)

C 1- CALCUL DES COEFFICIENTS DE CORRECTIONS "C" ET "D"
C 2- CALCUL DE LA VALEUR CORRIGE DE LA PERMITTIVITE DU
C      MILIEU UN

      CALL CD(ENERC,CINT2,CINTV,CINT1)
      PRINT *, ' '
      PRINT *, ' '
      END

```

REFERENCES

- (1) Akyel, C., Système hyperfréquentiel de mesure et de calcul de la permittivité complexe en temps réel, thèse de doctorat, école Polytechnique de Montréal, 1980.
- (2) Balkanski, M. et Sébenne, C., Ondes et phénomènes vibratoires, Dunod université, 1969.
- (3) Gabillard R., Vibrations et phénomènes de propagation, Dunod, Paris, 1969.
- (4) Li, S. et Bosisio, R.G., Composite hole conditions on complex permittivity measurements using microwave cavity perturbation techniques, IEEE Trans. Microwave Theory Tech., Vol. MTT-30, No.10, pp. 100-103, 1982.
- (5) Li, S., Akyel, C. et Bosisio, R.G., Precise calculations and measurements on the complex dielectric constant of lossy materials using TM_{010} cavity perturbation techniques, IEEE Trans. Microwave Theory Tech., Vol. MTT-29, No. 10, pp. 1041-1048, 1981.
- (6) Nikolsky, V., Electrodynamique et propagation des ondes radio-électriques, éditions Mir, Moscou, 1982.
- (7) Lorrain, P. et Corson, D., Electromagnetic fields and

waves, W.H. Freeman and Company, 1970.

- (8) Harrington, R.F., Time-harmonic electromagnetic fields, McGraw-Hill Book Co., 1953.
- (9) Johnson, C.C., Field and wave electrodynamics, McGraw-Hill, 1965.
- (10) Maclean, W.R., The resonator action theorem, Quartely of Applied Maths, Vol. 2, pp. 329-335. 1945.
- (11) Spiegel, M.R., Formules et tables de mathématiques, Série Schaum McGraw-Hill, 1974.
- (12) Estin, A.J. et Bussey, H.F., Error in dielectric measurements due to a sample insertion hole in a cavity, IRE Trans. Microwave Theory thech., Vol. MTT8, pp. 650-653, 1963.
- (13) Press, W.H., Flannery, B.P., Teukolsky, S.A. et Vetterling, W.T., Numerical Recipes, Cambridge University Press, 1986.
- (14) St-Onge, B. et Sochanski, J., GRAPHE Procédure de traçage de graphiques, Université du Québec à Trois-Rivières, 1985.
- (15) Montgomery, J.P., On the complete eigenvalue solution of ridged waveguide, IEEE Trans. Microwave Theory Tech., Vol. MTT-19, pp. 547-555, 1971.

- (16) Angot, A., Compléments de mathématiques, édition de la revue d'optique, 1965.
- (17) Ayres, F., Calcul différentiel et intégral, Série Schaum McGraw-hill, 1972.